

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΕ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΚΑΙ
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ**

16 Νοεμβρίου 2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f λέμε πως είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 ;

(Μονάδες 6)

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

(Μονάδες 6)

A3. Να αποδείξετε πως αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο x_0 .

(Μονάδες 7)

A4. Να σημειώσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις.

α. Το σύνολο τιμών μίας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f ορισμένης στο (α, β) είναι το σύνολο (A, B) όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$

β. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι επίσης διάστημα.

γ. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = 0$.

δ. Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα Δ , θα παίρνει μια ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή στο Δ .

ε. Κάθε συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα που οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

στ. Αν η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών $f(A) = (0, +\infty)$ τότε η εξίσωση $f(x) = -3$ είναι αδύνατη.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = x^2 - x + 2$.

B1. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0,1)$.

(Μονάδες 5)

B2. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g και να βρείτε το σημείο επαφής.

(Μονάδες 6)

B3. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_g που διέρχεται από το σημείο $M(2,0)$

(Μονάδες 7)

B4. Να δείξετε πως οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^3 + \beta x + 2, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} + e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

Η ευθεία $(\varepsilon) y=4x+4$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο της με τετμημένη $x=-1$.

Γ1. Να δείξετε πως $\alpha=\beta=1$.

(Μονάδες 5)

Γ2.

α. Να δείξετε πως

i. Η f είναι συνεχής

ii. Η f είναι γνησίως άυξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 4+5)

Γ3. Να δείξετε πως η συνάρτηση f έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να βρείτε την $f'(x)$. Έπειτα να βρείτε (αν ορίζεται) την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f , με $f^2(x) + x^2 - 1 = 2xf(x) + e^x(e^x + 2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Δίνεται επίσης πως $f(0) = 2$.

Δ1. Να δείξετε πως ο τύπος της f είναι $f(x) = e^x + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

Δ2. Εάν η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $x \cdot g(x) + x = f(x) - 2$ να βρεθεί ο τύπος της g .

(Μονάδες 6)

Δ3. Να δείξετε πως δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες της C_f να είναι μεταξύ τους παράλληλες.

(Μονάδες 4)

Αν για την συνεχή g ισχύει : $g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ τότε :

Δ4. Να δείξετε πως η εξίσωση :

$$(x - 1) \cdot g(x) = \frac{x}{9} \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(\ln 2 + 2h) - f(\ln 2 - h)}{h} \right) \right) \cdot (|\eta\mu\alpha| - |\alpha|), \alpha \neq 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα, στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 8)

Ευχόμαστε επιτυχία!

Επιμέλεια Θεμάτων : Γ.Γιαννακόπουλος