

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Να αποδείξετε πως αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$

(Μονάδες 6)

A2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέμε ότι είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

(Μονάδες 5)

A3. Να διατυπώσετε το **Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής**.

(Μονάδες 4)

A4. Να σημειώσετε με **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις.

α. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x))$ τότε θα είναι ίσο με $f(2) \cdot g(2)$

β. Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε θα ισχύει υποχρεωτικά $f''(x) > 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ .

γ. Αν f συνεχής στο Δ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε θα ισχύει $\alpha = \beta$, για $\alpha, \beta \in \Delta$.

δ. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο κατά δύο τουλάχιστον μονάδες απ'τον βαθμό του παρονομαστή δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

ε. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ τότε υποχρεωτικά $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ ή $-\alpha$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = e^x + e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x, x > 0$

B1. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x) = (\varphi \circ g)(x)$

Αν $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$ τότε

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

B3. i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

(Μονάδες 3)

B4. i. Με βάση τα ερωτήματα B2 και B3 να γίνει η γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \lambda x, & x < 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

(Μονάδες 3)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 3+3=6)

Γ3. i. Να δείξετε πως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4+2=6)

ii. Να δείξετε πως η εξίσωση :

$$(1 - x^4) \cdot (x_0 - \eta \mu x_0) = x^3 \cdot \frac{f(x_0 + 2025)}{x_0}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοιχτό διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να δείξετε ότι $\int_{-1}^0 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx > -\ln 2$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f(x) = e^x + x^2 + \alpha x + \beta, x \in \mathbb{R}$.

Η ευθεία $(\varepsilon) y = (1 - e)x$ εφαπτεται στην C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$

Δ1. Να δείξετε πως $\alpha = -e$ και $\beta = -1$

(Μονάδες 3+2=5)

Δ2.

i. Να δείξετε πως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.

ii. Να δείξετε πως η f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο σε σημείο $x_0 \in (0,1)$

(Μονάδες 2+5=7)

Δ3. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να δείξετε πως $\int_0^{x_0} x \cdot f''(x) dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(x) \eta \mu t dt$

(Μονάδες 7)

Εύχομαι επιτυχία...!