

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

6-4-2025

Επιμέλεια : Γ.Α.Γιαννακόπουλος

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano.

Μονάδες 5

A2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο Δ ;

Μονάδες 6

A3. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Να αποδείξετε πως αν ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ .

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

β. Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$. Ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$$

γ. Ισχύει $(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

δ. Ένα τοπικό μέγιστο είναι πάντα μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

ε. Αν η f είναι συνάρτηση "ένα προς ένα" δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με ίδια τεταγμένη.

Μονάδες 5

A5. Αν $f'(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

A Ψ

β) το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

A Ψ

Επιλέξτε το σωστό κάθε φορά.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, πολυωνυμική β' βαθμού. Το σημείο $K(0, -3)$ ανήκει στην γραφική της παράσταση ενώ η εφαπτομένη της στο $x = -2$ είναι παράλληλη στον x' .
Δίνεται επίσης πως $f''(2025) = 2$

B1. Να δείξετε πως $f(x) = x^2 + 4x - 3, x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

B2. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(1, 1)$.

Μονάδες 5

B3. Να υπολογιστεί το όριο $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x)}{(\mu - 1)x^2 - 2\mu x + 1}$, για τα διάφορα $\mu \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x - 2}, x \geq 2$.

B4.

i. Να ορίσετε την $h(x) = (g \circ f)(x)$

Μονάδες 3

ii. Αν $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}, x \in (-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$ να δείξετε πως η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 2\alpha}$

Δίνεται επίσης πως $\alpha^x + 2^x \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε πως $\alpha = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε πως η εξίσωση $x^3 - \lambda x^2 - 9x + \lambda = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=\lambda$ και στην συνέχεια, πως έχει 3 ρίζες για κάθε τιμή του λ .

Μονάδες 6

Γ4. Να βρεθεί το εμβαδόν ανάμεσα στην C_f , τον x' και τις ευθείες $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - \alpha}$, $x \geq \alpha$, και η $g(x) = \frac{x+1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δίνεται επίσης πως $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} = 1$

Δ1. Να δείξετε πως

i. $f'(2) = \frac{1}{2}$ και ii. $\alpha = 1$

(Μονάδες 5+2=7).

Δ2 i. Να βρείτε το σημείο K της C_f το οποίο απέχει λιγότερο από το σημείο $M(5/2, 0)$ και

ii. να δείξετε πως η εφαπτομένη (ϵ) της f στο K είναι κάθετη στην KM .

(Μονάδες 5+2=7)

Δ3. Να βρεθεί το εμβαδόν ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των f , g .

(Μονάδες 6)

Δ4. Να δείξετε πως $\int_1^2 e^x \cdot f(x) dx < \frac{1}{2} e^2$.

(Μονάδες 5)

ΕΥΧΟΜΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

Γιώργος Γιαννακόπουλος.