

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΪΟΣ 2024
Επιμέλεια : Γ.Α.Γιαννακόπουλος

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής .

Μονάδες 5

A2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f στο Δ ;

Μονάδες 5

A3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 6

A4. Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε **Σωστό** ή **Λάθος** αν θεωρείτε πως είναι Σωστή ή Λανθασμένη αντίστοιχα. Για αυτές που είναι λανθασμένες να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, με την γραφική παράσταση της f .

β. Αν η f, g παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$$

γ. Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε θα ισχύει υποχρεωτικά $f''(x) > 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ .

δ. Αν f συνεχής συνάρτηση και $f(x) \neq 0$ στο \mathbb{R}^* τότε η f διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R}^* .

ε. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$, $c > 0$ και $\alpha < \beta$, αντιπροσωπεύει το εμβαδόν του

ορθογωνίου με μήκος $\beta - \alpha$ και πλάτος c .

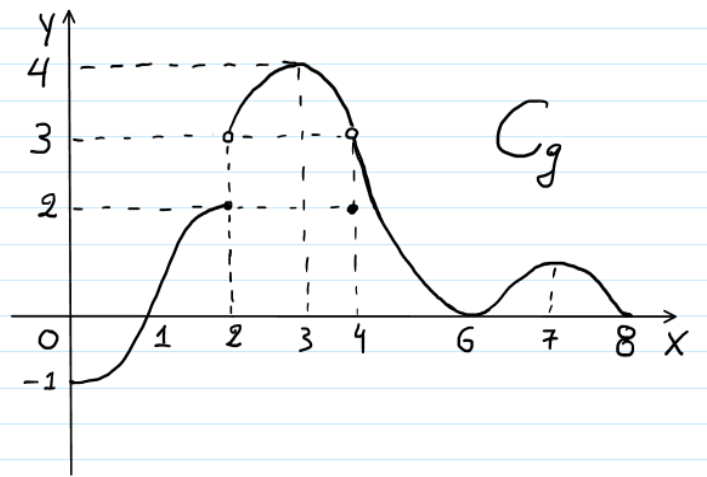
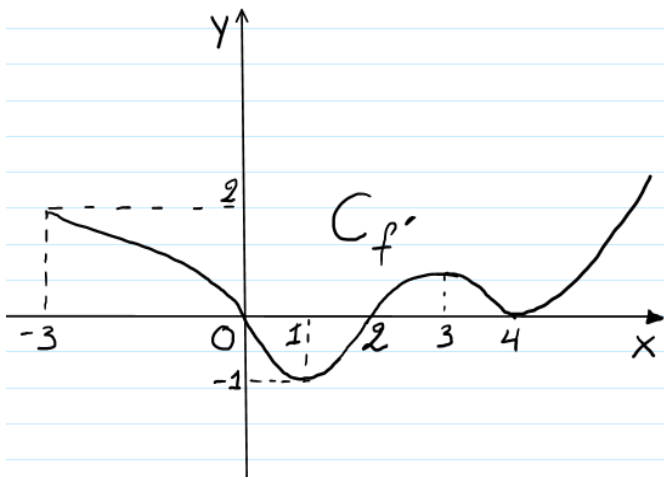
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(0) = 1 \text{ και η συνάρτηση } g: [0,8] \rightarrow \mathbb{R}$$

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f'(x)$ και $g(x)$.



B1. i. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 6} g(x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 4} g(x) \quad \delta. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{g(x)} \quad \epsilon. \lim_{x \rightarrow 4} g(f'(x))$$

ii. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η g δεν είναι συνεχής, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τις θέσεις των ακροτάτων της f .

B3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία είναι κοίλη καθώς και τις θέσεις των σημείων καμπής της f .

Δίνεται επιπλέον πως $f(2) = -1$

B4. Να δείξετε πως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν στο διάστημα $(0,2)$ μοναδικό κοινό σημείο.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - \kappa x}{x^2 - 1}$. Εάν $\int_1^{f(2)} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} dx - \int_{f(2)}^1 \frac{5}{x^2 + 1} dx = -\frac{13}{3}$

Γ1. Να δείξετε πως $f(2) = -\frac{10}{3}$ και $\kappa = 9$

Μονάδες 3+2=5

Γ2. i. Να δείξετε πως η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 4

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε πως εξίσωση $x^3 - ax^2 - 9x + a = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = a$ και στην συνέχεια πως έχει τρεις ακριβώς ρίζες για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται ανάμεσα στην C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = \sqrt{2}$ και $x = \sqrt{5}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f , για την οποία ισχύει,

■ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$

■ $f^2(x) = e^{2x^2}, x \in \mathbb{R}$

Δ1. i. Να δείξετε πως $f(0) = 1$

Μονάδες 3

ii. Να δείξετε πως ο τύπος της f είναι $f(x) = e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

Θεωρούμε επιπλέον μία αρχική H της f στο \mathbb{R} , με $H(0) = 0$

Δ2. Εάν το εμβαδό ανάμεσα στην γραφική παράσταση της H , τον x' και την ευθεία $x = 1$ είναι $E = \frac{1}{2}$, να δείξετε πως $H(1) = \frac{e}{2}$

Μονάδες 4

Δ3. Αν $\int_{H(1)}^{H(3)-6} f(x)dx = 0$, να δείξετε πως υπάρχει $\xi \in (1,3)$, ώστε $f(\xi) = 3$

Μονάδες 6

Δ4. Να μελετήσετε την συνάρτηση H ως προς την κυρτότητα και να δείξετε πως

$$\int_0^1 \frac{H(x)}{x^2 + 1} dx > \ln \sqrt{2}.$$

Μονάδες 2+6



ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ