Διαγώνισμα προσομοίωσης 2 - Απαντήσεις.

A1 Σχολικό σελ 128

A2 Σχολικό σελ 143

A3 Σχολικό σελ 217

A4 α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$.
$f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Όμως η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$ αφού $f''(0)=0$.

δ) Λάθος για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x$ για $x\in\mathbb{R}^*$. Η $f(x)=x$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ οπότε θα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από αυτά. $f(1)=1>0 \Rightarrow f(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ και $f(-1)=-1<0 \Rightarrow f(x)<0$ στο $(-\infty,0)$.

ε) Σωστό.

Θέμα Β

B1 i) α) $\lim\limits_{x\to 6} g(x)=0$

β) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=3$ $\Big\}$ Αφού $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ τότε το $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ δεν ορίζεται.

γ) $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = 3$

δ) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{g(x)} = +\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 6} g(x) = 0$ και $g(x) > 0$ κοντά στο $x_0 = 6$

ε) $\lim\limits_{x\to 4} g(f'(x)) = -1$ αφού $\lim\limits_{x\to 4} f'(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$

ii) Η g δεν είναι συνεχής στο:

- $x=2$ αφού δεν υπάρχει το όριο εκεί επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

- $x=4$ αφού $g(4)=2$ και $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4} g(x) \neq g(4)$

<u>**B2**</u>

x	-3		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
	Τ.Ε		Τ.Μ		Τ.Ε.				

Η $f'(x) > 0$ στο $[-3,0) \cup (2,4) \cup (4,+\infty)$ οπότε η f αύξουσα στα διαστήματα $[-3,0]$, $[2,4]$ και $[4,+\infty)$.

Η $f'(x) < 0$ στο $(0,2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$

Για $x=-3$ και $x=2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και για $x=0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Β3 Στο $[-3,1]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η f είναι κοίλη στο $[-3,1]$

Στο $[1,3]$ η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε η f είναι κυρτή στο $[1,3]$

Στο $[3,4]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε η f είναι κοίλη στο $[3,4]$

Στο $[4,+\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε η f είναι κυρτή στο $[4,+\infty)$.

x	-3		1		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	//	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f(x)$	//	$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	
			Σ.Κ		Σ.Κ		Σ.Κ		

Οι θέσεις των σημείων καμπής είναι $x_1=1$, $x_2=3$ και $x_3=4$.

Β4

Για το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f και g λύνω $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,2]$.

- $h(0)=f(0)-g(0)=1-(-1)=2>0$
- $h(2)=f(2)-g(2)=-1-2=-3<0$

$h(0)\cdot h(2)<0$. Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

Οπότε οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο $(0,2)$

Στο $(0,2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα από Β2 ερώτημα και η g είναι γνησίως αύξουσα από τη γραφική της παράσταση.

Για $x_1, x_2 \in (0,2)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{με } x_1 < x_2 \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2) \\ x_1 < x_2 \underset{g \nearrow}{\Rightarrow} g(x_1) < g(x_2) \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} -g(x_1) > -g(x_2) \end{array}\right\} \text{ προσθέτω κατά μέλη}$$

$$f(x_1) - g(x_1) > f(x_2) - g(x_2) \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$ άρα έχει μία το πολύ λύση.

Τελικά οι C_f, C_g έχουν στο διάστημα $(0,2)$ μοναδικό κοινό σημείο.

<u>Θέμα Γ</u>

<u>Γ1</u> $f(x) = \dfrac{x^3 - kx}{x^2 - 1}$ με $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Ισχύει: $\displaystyle\int_1^{f(2)} \frac{x^2-4}{x^2+1}\,dx - \int_{f(2)}^{1} \frac{5}{x^2+1}\,dx = -\frac{13}{3} \Leftrightarrow$

$$\int_1^{f(2)} \frac{x^2-4}{x^2+1}\,dx + \int_1^{f(2)} \frac{5}{x^2+1}\,dx = -\frac{13}{3} \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{f(2)} \frac{x^2-4+5}{x^2+1}\,dx = -\frac{13}{3} \Leftrightarrow \int_1^{f(2)} \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx = -\frac{13}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{f(2)} 1\,dx = -\frac{13}{3} \Leftrightarrow [x]_1^{f(2)} = -\frac{13}{3} \Leftrightarrow f(2) - 1 = -\frac{13}{3}$$

$$\Leftrightarrow f(2) = 1 - \frac{13}{3} \Leftrightarrow f(2) = \frac{3-13}{3} \Leftrightarrow \boxed{f(2) = -\frac{10}{3}}$$

$\therefore\ f(2) = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{8-2\kappa}{4-1} = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{8-2\kappa}{3} = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow$

$8-2\kappa = -10 \Leftrightarrow -2\kappa = -18 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 9}$

Γ2 i) Για $\kappa = 9$ $\quad f(x) = \frac{x^3-9x}{x^2-1}$ με $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο D_f

$$f'(x) = \frac{(x^3-9x)'(x^2-1) - (x^3-9x)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{(3x^2-9)(x^2-1) - (x^3-9x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{3x^4 - 3x^2 - 9x^2 + 9 - 2x^4 + 18x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^4+6x^2+9}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2+3)^2}{(x^2-1)^2} > 0.$$

Άρα η f είναι αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, +\infty)$.

ii) Στο $\Delta_1 = (-\infty, -1)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα το σύνολο τιμών της είναι

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to-1^-} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-9x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x^3-9x}{x^2-1} = (-1+9)\cdot(+\infty) = 8\cdot(+\infty) = +\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Στο $\Delta_2=(-1,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών $f(\Delta_2)=(\lim_{x\to -1^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x))=(-\infty,+\infty)$

$\cdot \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3-9x}{x^2-1} = 8\cdot(-\infty)=-\infty$

$\cdot \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-9x}{x^2-1} = -8\cdot(-\infty)=+\infty$

Στο $\Delta_3=(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα το σύνολο τιμών $f(\Delta_3)=(\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x))$ $=(-\infty,+\infty)$

$\cdot \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-9x}{x^2-1} = -8\cdot(+\infty)=-\infty$

$\cdot \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-9x}{x^2-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι

$f(D_f)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=(-\infty,+\infty)$

Γ3 $\quad x^3-ax^2-9x+a=0 \Leftrightarrow x^3-9x=ax^2-a \Leftrightarrow$

$x^3-9x=a(x^2-1)$

Αν $x\neq \pm 1$ $\quad \frac{x^3-9x}{x^2-1}=a \Leftrightarrow f(x)=a \quad , a\in\mathbb{R}$

Το $a\in f(\Delta_1)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=a$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1, αφού η f είναι αύξουσα στο Δ_1.

Ομοίως $a\in f(\Delta_2)$, $a\in f(\Delta_3)$ άρα η εξίσωση $f(x)=a$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2 και Δ_3 αφού η f αύξουσα στα διαστήματα Δ_3 και Δ_3.

Τελικά η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

δ) $f(x) = \dfrac{x^3-9x}{x^2-1} \iff f(x)=0 \iff x^3-9x=0 \iff x(x^2-9)=0$

$x=0$ ή $x^2-9=0 \iff$

$x=0$ ή $x=\pm 3$.

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$\sqrt{2}, \sqrt{5} \in [1,3]$ όπου η $f(x)<0$ και συνεχής στο $[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$.

Το εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} |f(x)|\,dx = -\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} f(x)\,dx = (1)$$

• $$\frac{x^3-9x}{x^2-1} = \frac{x\cdot(x^2-1)-8x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} - \frac{8x}{x^2-1} = x - \frac{4\cdot 2x}{x^2-1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2-9x & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^3 \qquad +x & x \\ \hline -8x & \end{array}$$

$$(1) = -\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\left(x - \frac{4\cdot 2x}{x^2-1}\right)dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\left(-x + \frac{4\cdot 2x}{x^2-1}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 4\ln|x^2-1|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = -\frac{5}{2} + 4\ln 4 - \left(-1 + 4\ln 1\right)$$

$$= -\frac{5}{2} + 4\ln 4 + 1 = 4\ln 4 - \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα Δ

Δ1

i) Αφού η f είναι συνεχής θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ και θα ισχύει

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1 \qquad \text{Θέτω} \quad \frac{f(x)-1}{x} = g(x) \quad \text{με} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 = x g(x) \Leftrightarrow$$
$$f(x) = x g(x) + 1.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x g(x) + 1\right) = 0 + 1 = 1 \overset{(1)}{=} f(0).$$

Άρα $f(0) = 1$

ii) $f^2(x) = e^{2x^2} \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{e^{2x^2}} \Leftrightarrow |f(x)| = |e^{x^2}|$ (1)

$e^{x^2} \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$...

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δε μηδενίζεται σε αυτό άρα θα διατηρεί πρόσημο.

από (i) ερώτημα $f(0) = 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(1) $\Rightarrow f(x) = e^{x^2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

Δ2 Η αρχική της f στο $\mathbb{R}$

$H'(x) = f(x) = e^{x^2} > 0$, για $x \in \mathbb{R}$ άρα $H \uparrow$ και 1-1

$H(x) = 0 \Rightarrow H(x) = H(0) \overset{1-1}{\Rightarrow} x = 0$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E = \int_0^1 |H(x)| dx = \int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 (x)' H(x) dx =$

για $x \geq 0 \Rightarrow H(x) \geq H(0)$
$\Rightarrow H(x) \geq 0$

$= [x H(x)]_0^1 - \int_0^1 x H'(x) dx$

$= H(1) - 0 - \int_0^1 x f(x) dx$

$= H(1) - \int_0^1 x e^{x^2} dx = H(1) - \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1$

$= H(1) - \frac{1}{2} e + \frac{1}{2}$

όμως $E = \frac{1}{2} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} = H(1) - \frac{1}{2} e + \cancel{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{H(1) = \frac{e}{2}}$

Δ3 $\int_{H(1)}^{H(3)-6} f(x) dx = 0 \Rightarrow [H(x)]_{H(1)}^{H(3)-6} = 0$

$\Rightarrow H(H(3)-6) - H(H(1)) = 0 \Rightarrow$

$H(H(3)-6) = H(H(1)) \overset{H(x)\ 1-1}{\Rightarrow} H(3) - 6 = H(1) \Rightarrow$

$H(3) - H(1) = 6$

Η $H(x)$ είναι συνεχής στο $[1,3]$

Η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ με $H'(x) = f(x)$

Από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (1,3)$

με $H'(\xi) = \frac{H(3) - H(1)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{f(\xi) = 3}$

Δ4 Είναι $H'(x) = f(x)$

και $H''(x) = f'(x) = 2xe^{x^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
H''	$-$	0	$+$
H		Σ.Κ.	

Η H είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$

Η εφαπτομένη διαπερνά τη C_H στο σημείο καμπής

$\varepsilon: y - H(0) = H'(0)(x-0) \Rightarrow y - 0 = f(0)x \Rightarrow y = x$

Για $x \geq 0$ η H κυρτή άρα στο $[0, 1]$ η $H(x)$ κυρτή

Οπότε $H(x) \geq x$ το "=" ισχύει μόνο για $x=0$

$: (x^2+1) > 0$

$$\Rightarrow \frac{H(x)}{x^2+1} \geq \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \int_0^1 \frac{H(x)}{x^2+1}dx > \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{H(x)}{x^2+1}dx > \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{H(x)}{x^2+1}dx > \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{H(x)}{x^2+1}dx > \frac{1}{2}\ln 2 \Rightarrow \int_0^1 \frac{H(x)}{x^2+1}dx > \ln 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{H(x)}{x^2+1}dx > \ln\sqrt{2}.$$