

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

---

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ Νο 1



**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ Νο 1**

**ΘΕΜΑ Α - ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Να αποδείξετε πως αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

**A2.** Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε διάστημα  $\Delta$ . Εάν

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
  - $f'(x)=0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$
- τότε να αποδείξετε πως η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Delta$ .

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x)>0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**A4.** Να αποδείξετε πως αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**A5.** Έστω η συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $[\alpha, \beta]$ .

Να αποδείξετε πως αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) \neq f(\beta)$  τότε, για κάθε αριθμό  $\eta$  ανάμεσα στα  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$ , υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  ώστε :  $f(x_0) = \eta$

**A6.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln |x|$ . Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ .

(Μονάδες 5x6=30)

## ΘΕΜΑ Β

**B1.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

**B2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano.

**B3.** Ποια σημεία ονομάζονται *κρίσιμα σημεία* μιας συνάρτησης  $f$  ορισμένης σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;

**B4.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

**B5.** Πότε λέμε πως μία συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει στο σημείο  $x_0$  τοπικό μέγιστο;

**B6.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  του πεδίου ορισμού της;

**B7.** Έστω συνάρτηση  $f$  και σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  της γραφικής της παράστασης. Τι ονομάζουμε εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A$ ;

**B8.** Πότε μία συνάρτηση λέμε ότι είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**B9.** Έστω συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πως ορίζεται η συνάρτηση πρώτη παράγωγος της  $f$ ;

**B10.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

(Μονάδες 30)

## ΘΕΜΑ Γ

### Γ1. ΑΛΗΘΗΣ/ΨΕΥΔΗΣ ΜΕ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

A. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής στο  $x_0$ , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα A, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Β. Αν ισχύει  $(f \cdot g)(x) = 0$ , για κάθε  $x \in A$ , τότε  
 $f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in A$  ή  $g(x) = 0$  για κάθε  $x \in A$ .

Η παραπάνω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Αιτιολογήστε.

(Μονάδες  $(1+4=5) \times 2 = 10$ )

## Γ2. Σωστό - Λάθος

α. Αν  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

β. Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

γ. Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

δ. Αν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x))$  τότε θα είναι ίσο με  $f(2) \cdot g(2)$

ε. Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

στ. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

ζ. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y=x$ .

η. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει πάντα μοναδική ρίζα.

θ. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $|\eta \mu x| \geq |x|$

ι. Η εικόνα ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι επίσης διάστημα.

κ. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[\alpha, \beta]$  και δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών στο  $[\alpha, \beta]$  τότε υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

λ. Μια γραμμή μπορεί να αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, όταν κάθε κατακόρυφη ευθεία την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο.

(Μονάδες 12)

### Γ3. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

α. Αν η  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$  τότε

- i. Υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  με  $f(x_0) = 0$
- ii. Η  $f$  δεν έχει καμία ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$
- iii. Η  $f$  έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο  $(\alpha, \beta)$
- iv. Τίποτα από τα παραπάνω δεν ισχύει.

(Μονάδες 2)

β. Αν  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = e^{-x}$  τότε

i.  $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$       Α/Ψ

ii.  $(f \circ g)(x) = -x, x \in \mathbb{R}$       Α/Ψ

(Μονάδες 2)

γ. Έστω η  $f$  παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις δεν ισχύει κατ'ανάγκη.

- i. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$
- ii. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο  $[\alpha, \beta]$
- iii. Η  $f$  παίρνει μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή στο  $[\alpha, \beta]$
- iv. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο  $[\alpha, \beta]$

( Μονάδες 2)

δ) Η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + x + 1$  έχει

- i. μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$
- ii. μία ακριβώς ρίζα στο  $(-1, 0)$
- iii. τρεις πραγματικές ρίζες

(Μονάδες 2)

ε. Αν  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in [-1,1]$  και  $f(0) = 0$  τότε :

- i.  $f(1)=-1$       ii.  $f(-1)>0$       iii.  $f(1)>0$       iv.  $f(-1)=0$

(Μονάδες 2)

στ. Ποιο από τα παρακάτω όρια είναι καλά ορισμένο;

- i.  $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x+1}$       ii.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x+1)$       iii.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4}$

(Μονάδες 2)

ζ. Ποιό από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλά ορισμένο;

a)  $\int_0^2 \ln x \, dx$     β)  $\int_1^3 \frac{1}{x^2-4} \, dx$     γ)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} \, dx$     δ)  $\int_{-4}^{-2} \sqrt{-x} \, dx$

(Μονάδες 2)

η. Η ευθεία  $x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

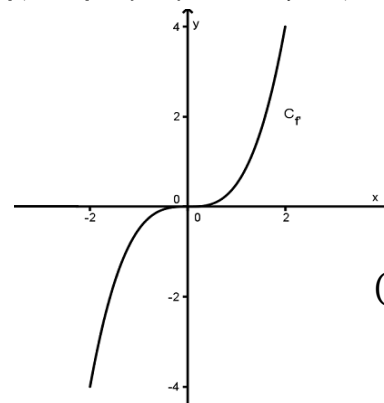
i.  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$ , A / Ψ

ii.  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$ , A / Ψ

(Μονάδες 2)

θ. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[-2,2]$ . Το  $O(0,0)$  είναι :

- i. Θέση τοπικού μεγίστου της  $f$   
ii. Σημείο καμπής της  $f$   
iii. Θέση τοπικού ελαχίστου της  $f$



(Μονάδες 2)

**Εύχομαι Επιτυχία**