

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ- ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι :

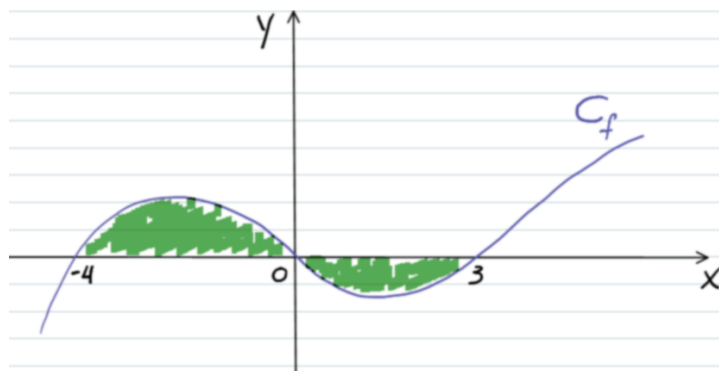
- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, c , είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

A2. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 5

A3. Στο παρακάτω σχήμα το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι ίσο με:



- i. $\int_{-4}^3 f(x)dx$ ii. $\int_{-4}^0 |f(x)|dx$ iii. $\int_{-4}^0 f(x)dx - \int_0^3 f(x)dx$ iv. $\int_{-4}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$

Μονάδες 5

A4. Να σημειώσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις.

α. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν F παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε θα είναι :

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = F(\alpha) - F(\beta).$$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

γ. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Το εμβαδόν Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$

δ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ε. Αν f συνεχής στο \mathbb{R} και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε $\alpha = \beta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f .

Μονάδες 3+2+2+1=8

B2. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Μονάδες 1 + 2 = 3

Με βάση τα ερωτήματα B1, B2 να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Μονάδες 4

B4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα

- i. στην C_f και τον άξονα x' .
- ii. στην C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=-2$ και $x=2$.

Μονάδες 5+5=10

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{\frac{\alpha}{x}}$, $x > 0$ για την οποία ισχύει, $f(x) \geq e^{\alpha}$, για κάθε $x > 0$

Γ1. Να δείξετε πως $\alpha=1$.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να βρείτε την μονοτονία και το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 6)

Γ3. Έστω συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, $x > 0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου

ανάμεσα C_g , τον άξονα x και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$

(Μονάδες 6)

Γ4. Να αποδείξετε πως $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx > e \cdot \ln 2$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και κυρτή και η $g(x) = \eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$.

Δ1. Να βρεθούν οι εφαπτομένες τις C_g που διέρχονται από το σημείο $A(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Αν $(\epsilon_1) y=x$ και $(\epsilon_2) y=-x+\pi$ οι εφαπτομένες του Δ1, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g και τις παραπάνω ευθείες.

(Μονάδες 8)

Εάν επιπλέον ισχύει $\int_{f(0)}^{f(4)} (5e^{x^2} + x^{2024}) dx = 0$ τότε να δείξετε ότι:

Δ3. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 4)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ακρότατο και να προσδιορίσετε το είδος του.

(Μονάδες 6)

Δ4. Ισχύει $\int_0^{x_0} x \cdot f''(x) dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (f(x) - f(4)) \cdot g(t) dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$, όπου x_0 αυτό

του ερωτήματος Δ3.

(Μονάδες 5)

ΕΥΧΟΜΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ- Γ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ