

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

18 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

(Μονάδες 5)

A2.

I. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ . Τί ονομάζουμε αρχική συνάρτηση η παράγουσα της f στο Δ ;

II. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(Μονάδες 8)

A3. Να σημειώσετε με **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις.

i. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμψής.

ii. Κάθε ρητή συνάρτηση με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο κατά δύο τουλάχιστον μονάδες από τον βαθμό του παρονομαστή δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Η γραφική παράσταση μίας κυρτής συνάρτησης βρίσκεται πάντα πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

iv. Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$. Ισχύει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$$

(Μονάδες 8)

A4. Δίνεται η παρακάτω πρόταση.

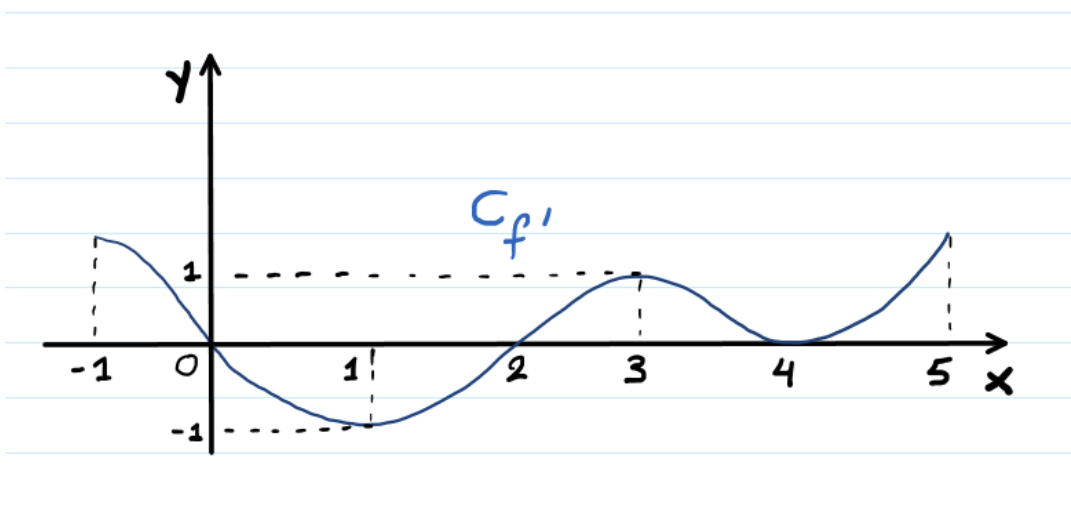
«Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ »

Είναι αληθής ή ψευδής; Αιτιολογήστε.

(Μονάδες 1+3=4)

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[-1, 5]$. Η $C_{f'}$ διέρχεται από το σημείο $K(1, 2)$.



B1. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

B2. Να γράψετε τα διαστήματα κυρτότητας καθώς και τις θέσεις σημείων καμπής της f .

B3. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f'(x)}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 3} f'(f'(x))$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και να δείξετε πως έχει τρία σημεία καμπής, τα οποία είναι συνευθειακά. (Μονάδες 4+3+2=9)

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να σχεδιάσετε την C_f . (Μονάδες 2+4=6)

Γ4. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι

$x^2 f'(x) + x f(x) = 1$, για κάθε $x > 0$ και παραγωγίσιμη συνάρτηση g , με $g(1) = 0$ και $g'(1) = 1$. Επιπλέον ισχύει $g(x) \cdot f(x) \leq e^{x-1} - 1$, για κάθε $x > 0$.

Δ1. Να δείξετε πως:

i. $f(1)=1$

ii. $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, x > 0$



(Μονάδες 3+4=7)

Δ2. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

Δ3. Να βρεθεί η κυρτότητα της f και τα σημεία καμπής της.

(Μονάδες 4)

Δ4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να γίνει η C_f .

(Μονάδες 2+4=6)

Δ5. Να λυθεί η εξίσωση

$$1 + \ln f(x) = \ln \left(-\frac{x}{2} + 2\sqrt{e} \right), x > e^{-1} \quad (\text{Μονάδες 4})$$

-----ΤΕΛΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ-----

Επιμέλεια Θεμάτων : Γ.Α.Γιαννακόπουλος
Εύχομαι επιτυχία!