# Απαντήσεις Διαγωνίσματος προσανατολισμού Γ' Λυκείου

## Θέμα Α

**Α1** Σχολικό σελ 216

**Α2** I Σχολικό σελ 185

II Σχολικό σελ 162

**Α3** I Σωστό

II Λάθος

III Σωστό

IV Λάθος

**Α4** Ψευδής

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$. Επειδή η $f'(x)=4x^3$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Όμως η $f''(x)=12x^2$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$ αφού $f''(0)=0$.

## Θέμα Β

**Β1**
- $f'(x)>0$ στο $[-1,0)$ $\Rightarrow$ η $f$ αύξουσα στο $[-1,0]$
- $f'(x)<0$ στο $(0,2)$ $\Rightarrow$ η $f$ φθίνουσα στο $[0,2]$
- $f'(x)>0$ στο $(2,4)\cup(4,5]$ $\Rightarrow$ η $f$ αύξουσα στα διαστήματα $[2,4]$ και $[4,5]$.

| x | -1 | | 0 | | 2 | | 4 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | + | |
| f(x) | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↗ | |
| | τ.ε | | τμ | | τ.ε | | | | τμ |

Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι τα σημεία στα οποία η f' μηδενίζεται ή τα σημεία 0, 2, 4 και τα σημεία -1, 5 που είναι άκρα του πεδίου ορισμού της f.

Άρα οι αριθμοί 0, 5 είναι θέσεις τοπικών μεγίστων και οι αριθμοί -1, 2 είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων. Ο αριθμός 4 δεν είναι θέση τοπικού μεγίστου γιατί η f' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού.

**B2** Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στα [-1, 1] και [3, 4] άρα στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στα [-1, 1] και [3, 4]

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στα [1, 3] και [4, 5] άρα στρέφει τα κοίλα πάνω (κυρτή) στα [1, 3] και [4, 5].

Τα σημεία 1, 3, 4 είναι θέσεις σημείων καμπής.

| x | -1 | | 1 | | 3 | | 4 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |
| f(x) | | ∩ | | ∪ | | ∩ | | ∪ | |

**B3** α) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x^2-x} \underset{DLH}{=} \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{2x-1} = \frac{-1}{2-1} = -1$

Αφού η Cf διέρχεται από το Κ(1,2) ισχύει f(1)=2.

δ) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{f'(x)} = +\infty$

$\lim_{x\to 4} f'(x) = 0$ και $f'(x) > 0$ κοντά στο $x_0 = 4$

$\cdot \lim_{x\to 3} f'(f(x)) = -1.$

$= \lim_{x\to 3} f'(x) = 1.$

## Θέμα Γ

**Γ1** $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ $x \in \mathbb{R}$ και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4) - x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x^2+4} = 0 \Leftrightarrow 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | Τ.Ε. | $\nearrow$ | Τ.Μ. | $\searrow$ |

Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[2,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-2,2]$.

για $x=-2$ η $f$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-2) = \frac{-2}{4+4} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

για $x=2$ η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$

Γ2 $f''(x) = \dfrac{-2x\cdot(x^2+4)^2 - (4-x^2)\cdot 2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} \Leftrightarrow$

$f''(x) = \dfrac{-2x(x^2+4)^2 - 4x(4-x^2)\cdot(x^2+4)}{(x^2+4)^4} \Leftrightarrow$

$f''(x) = \dfrac{-2x(x^2+4)\left[(x^2+4)+2(4-x^2)\right]}{(x^2+4)^{\cancel{4}\,3}} \Leftrightarrow$

$f''(x) = \dfrac{-2x(x^2+4+8-2x^2)}{(x^2+4)^3} \Leftrightarrow f''(x) = \dfrac{-2x(12-x^2)}{(x^2+4)^3}$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x(12-x^2)}{(x^2+4)^3} = 0 \Leftrightarrow -2x=0$ ή $12-x^2=0$

$\boxed{x=0}$ ή $x^2=12 \Leftrightarrow \boxed{x=\pm 2\sqrt{3}}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2\sqrt{3}$ | | $0$ | | $2\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ⌢ | Σ.Κ. | ⌣ | Σ.Κ. | ⌢ | Σ.Κ. | ⌣ | |

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,-2\sqrt{3}]$ και $[0,2\sqrt{3}]$ και η f είναι κυρτή στα διαστήματα $[-2\sqrt{3},0]$ και $[2\sqrt{3},+\infty)$.

Τα σημεία καμπής της f είναι
$A(-2\sqrt{3}, f(-2\sqrt{3}))$, $B(0,f(0))$, $\Gamma(2\sqrt{3}, f(2\sqrt{3}))$

Δηλαδή τα $A\left(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $B(0,0)$, $\Gamma\left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

$f(-2\sqrt{3}) = \dfrac{-2\sqrt{3}}{16} = -\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

$f(2\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

$f(0)=0$

$\vec{OA} = \left(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

$\vec{OB} = \left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_{\vec{OA}} = \dfrac{\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} = \dfrac{1}{16} \\ \lambda_{\vec{OB}} = \dfrac{1}{16} \end{array}\right\}$ $\lambda_{\vec{OA}} = \lambda_{\vec{OB}}$ άρα τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Γ3΄. Κατακόρυφη ασύμπτωτη δεν έχει γιατί είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πλάγιες - οριζόντιες

Στο $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+4} = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

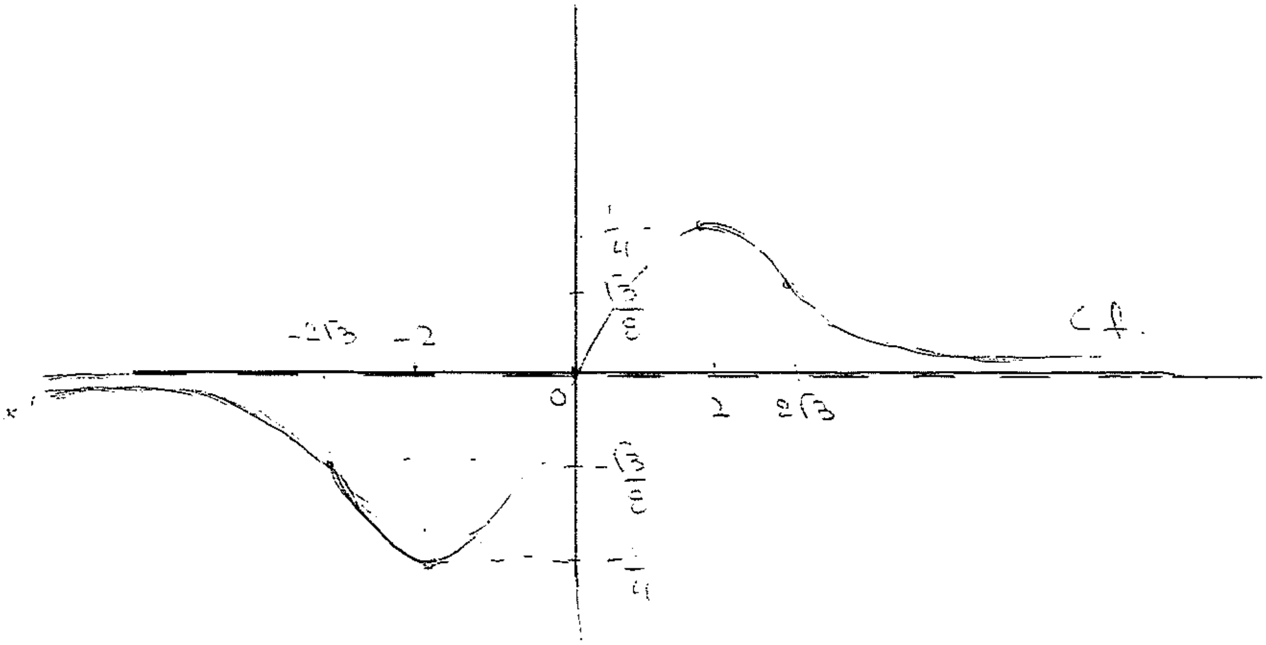
Η $y=0$ (δηλαδή ο άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$.

Ομοίως στο $+\infty$

$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ και $\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = 0$

Η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2\sqrt{3}$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $2\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | Σ.Κ $A(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{8})$ | ↘ | Τ.Ε $f(-2) = -\frac{1}{4}$ | ↗ | Σ.Κ $B(0,0)$ | ↗ | Τ.Μ $f(2)=\frac{1}{4}$ | ↘ | $\Gamma(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{8})$ | ↘ | |




<u>Γ4</u> $f(x) = \lambda$

Αν $\lambda < -\frac{1}{4}$ τότε $f(x)=\lambda$ καμία ρίζα

Αν $\lambda = -\frac{1}{4}$ τότε $f(x)=\lambda$ έχει μια ρίζα

Αν $-\frac{1}{4} < \lambda < 0$ τότε $f(x)=\lambda$ έχει δύο ρίζες

Αν $\lambda = 0$ τότε $f(x)=\lambda$ έχει μια ρίζα

Αν $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ τότε $f(x)=\lambda$ έχει δύο ρίζες

Αν $\lambda = \frac{1}{4}$ τότε $f(x)=\lambda$ έχει μια ρίζα

Αν $\lambda > \frac{1}{4}$ τότε $f(x)=\lambda$ καμία ρίζα.

Θέμα Δ

Δ1

i) Ισχύει $g(x)\cdot f(x) \le e^{x-1} - 1$ για κάθε $x>0$

$\Leftrightarrow g(x)\cdot f(x) - e^{x-1} + 1 \le 0$ (1)

Έστω $h(x) = g(x) f(x) - e^{x-1} + 1$ $x>0$.

$h'(x) = g'(x) f(x) + g(x) f'(x) - e^{x-1}$ $x>0$

Για κάθε $x>0$ η (1) $h(x) \le 0 \Leftrightarrow h(x) \le h(1)$.

αφού $h(1) = g(1) f(1) - e^0 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$

οπότε η h παρουσιάζει μέγιστο 1 και σύμφωνα

με θ. Fermat ισχύει ότι $h'(1)=0$

$\Leftrightarrow g'(1) f(1) + g(1)\cdot f'(1) - e^0 = 0$

$1\, f(1) + 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 1}$

ii) Ισχύει $x f(x) + x^2 f'(x) = 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$f(x) + x f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x' f(x) + x f'(x) = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow (x f(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow \boxed{x f(x) = \ln x + c}$ (2)

για $x=1$ έχουμε $1\, f(1) = \ln 1 + c \Leftrightarrow \boxed{1 = c}$

Άρα η (2) $x f(x) = \ln x + 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x}$ με $x>0$.

**Δ2** $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x + 1)\cdot 1}{x^2} \Leftrightarrow$

$f'(x) = \dfrac{1 - \ln x - 1}{x^2} \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2} \quad x > 0}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$-\dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | ο.μ | $\searrow$ | |

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.
Για $x=1$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(1)=1$.

**Δ3** $f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 + \ln x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-x + \ln x \cdot 2x}{x^4} \Leftrightarrow$

$f''(x) = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{x^4} \Leftrightarrow \boxed{f''(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}} \quad x > 0$

• $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{e}}$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\frown$ | Σκ | $\smile$ | |

Η f είναι κοίλη στο $(0,\sqrt{e}]$ και κυρτή στο $[\sqrt{e},+\infty)$.

Σημείο καμπής είναι το $A(\sqrt{e}, f(\sqrt{e}))$, με $f(\sqrt{e}) = \dfrac{\frac{1}{2}+1}{\sqrt{e}} = \dfrac{3}{2\sqrt{e}} = \dfrac{3\sqrt{e}}{2e}$

Επομένως το $A\left(\sqrt{e}, \dfrac{3\sqrt{e}}{2e}\right)$

## Δ4 κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x + 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left((\ln x+1)\cdot\frac{1}{x}\right) = -\infty\cdot(+\infty) = -\infty$$

Άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

## Οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη

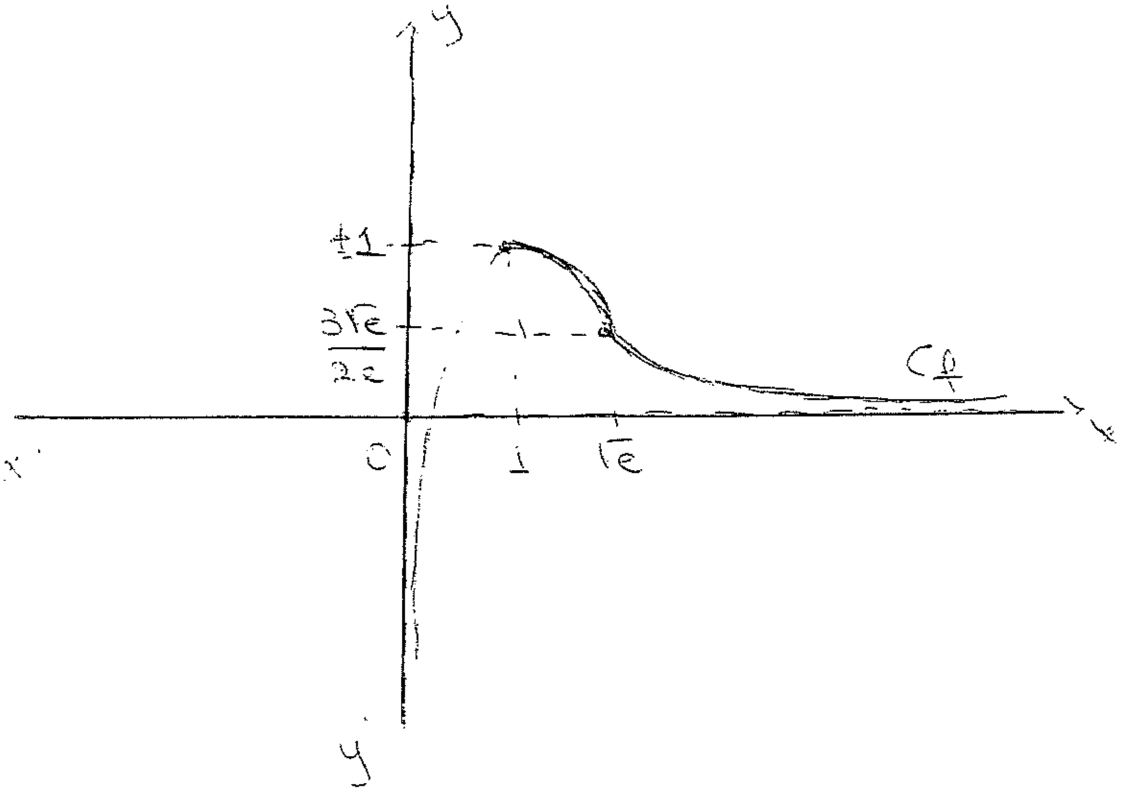
Στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x+1}{x^2} \underset{DLH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x+1}{x} \underset{DLH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | ‖ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ | ↗ | | ↘ | | ↘ | |
| | | | Ο.Μ<br>$f(1)=1$ | | Σ.Κ<br>$A\left(\sqrt{e}, \frac{3\sqrt{e}}{2e}\right)$ | | |




**Δ5** $\quad 1 + \ln f(x) = \ln\left(-\frac{x}{2} + 2\sqrt{e}\right) \quad (1)$

Η εφαπτομένη της f στο σημείο καμπής $A(\sqrt{e}, f(\sqrt{e}))$ είναι

$$y - f(\sqrt{e}) = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e})$$

με $f(\sqrt{e}) = \frac{3\sqrt{e}}{2e}$

$f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$

$f'(\sqrt{e}) = -\frac{1}{2e}$

$$y - \frac{3\sqrt{e}}{2e} = -\frac{1}{2e}(x - \sqrt{e})$$

$$y = -\frac{1}{2e}x + \frac{\sqrt{e}}{2e} + \frac{3\sqrt{e}}{2e}$$

$$y = -\frac{1}{2e}x + \frac{4\sqrt{e}}{2e} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2e}x + \frac{2\sqrt{e}}{e}}$$

(ii) $1 + \ln f(x) = \ln\left(-\frac{x}{2} + 2\sqrt{e}\right) \Leftrightarrow$ με $f(x) > 0$
$\Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

$\ln e + \ln f(x) = \ln\left(-\frac{x}{2} + 2\sqrt{e}\right) \Leftrightarrow$

$\ln e f(x) = \ln\left(-\frac{x}{2} + 2\sqrt{e}\right) \Leftrightarrow$

$e f(x) = -\frac{x}{2} + 2\sqrt{e} \overset{:e}{\Leftrightarrow}$

$f(x) = -\frac{x}{2e} + \frac{2\sqrt{e}}{e}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $(0, \sqrt{e}]$ και κυρτή στο $[\sqrt{e}, +\infty)$ η $C_f$ με την εφαπτομένη της στο $x_0 = \sqrt{e}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A(\sqrt{e}, f(\sqrt{e}))$