Απαντήσεις διαγωνίσματος στα όρια και στη συνέχεια

Θέμα Α

A1 Σελ 73

A2 Σελ 70

A3 α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

στ) Σωστό

ζ) Λάθος

Θέμα Β

B1 Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=\mathbb{R}-\{0\}$ και το σύνολο τιμών $f(A)=\mathbb{R}$

B2

- $B=\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

- $\Gamma=\lim_{x\to 3} f(x)=-2$

- $\Delta=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{f(x)}=+\infty$, αφού $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$ και $f(x)>0$ "κοντά" στο $-\infty$

- $E=\lim_{x\to 5}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ αφού $\lim_{x\to 5} f(x)=0$ και $f(x)\leq 0$ "κοντά" στο 5

- Αν $x<2$ $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ αφού $\lim_{x\to 2} f(x)=0$ $f(x)>0$

Αν $x > 2$ $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
$f(x) < 0$

Αφού $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)}$ τότε το όριο $\lim_{x \to 2} \frac{1}{f(x)}$

δεν υπάρχει

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $H = \lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$
- $\Theta = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} ημ f(x) = \lim_{y \to -\infty} \frac{ημ y}{y} = 0$

Θέτω $y = f(x)$
$y = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \to 3} (f(x) + 2) = -2 + 2 = 0$ και $f(x) > -2 \Rightarrow$
$f(x) + 2 > 0$

$K = \lim_{x \to 3} \frac{1}{f(x)+2} = +\infty$

B3 Στο $x_0 = -3$ η f δεν είναι συνεχής
αφού $\lim_{x \to -3} f(x) = 4 \neq \lim_{x \to -3^+} f(x) = 5$ δεν υπάρχει

το όριο

Στο $x_0 = 3$ δεν είναι συνεχής αφού
$\lim_{x \to 3} f(x) = -2 \neq f(3) = -3$.

Θέμα Γ

Γ1 $f(x) = 4x^2+1$ με $D_f = \mathbb{R}$

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-5}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{4x^2+1-5}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{4x^2-4}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{4(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{4\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} 4(x+1) = 4\cdot 2 = 8$$

$$B = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{f(x)}+(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2+1-x^2+2x-1}{x\cdot\left[\sqrt{4x^2+1}-(x-1)\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2+2x}{x\left(\sqrt{4x^2+1}-x+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(3x+2)}{\cancel{x}\left(\sqrt{4x^2+1}-x+1\right)}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

$$\Gamma = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)-3x^3+2}{x^3-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2+1-3x^3+2}{x^3-1}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-3x^3+4x^2+3}{x^3-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-3\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = -3$$

$$\Delta = \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+1}-3x+1\right) \overset{x>0}{=} \lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-3+\frac{1}{x}\right)$$

$$= +\infty\cdot(2-3) = +\infty\cdot(-1) = -\infty$$

$$E = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1} - 2x}$$

$$\overset{x<0}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} - 2\right)} = 0$$

$$Z = \lim_{x \to +\infty} (4x^2+1)^{2x} = \lim_{x \to +\infty} e^{2x \cdot \ln(4x^2+1)} = +\infty$$

αφού

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} 2x \ln(4x^2+1) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

Γ2 Αν $\mu \neq 0$ και $\mu \neq 3$ τότε

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\mu \cdot (4x^2+1)}{(\mu-3)x - 999} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\mu x^2}{(\mu-3)x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4\mu}{\mu-3} \cdot x = \frac{4\mu}{\mu-3} \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \mu \in (-\infty,0) \cup (3, \\ -\infty, & \mu \in (0,3) \end{cases}$$

αφού

$\frac{4\mu}{\mu-3} > 0 \Leftrightarrow \mu \in (-\infty,0) \cup (3,+\infty)$

$\frac{4\mu}{\mu-3} < 0 \Rightarrow \mu \in (0,3)$

μ	$-\infty$	0		3	$+\infty$
4μ	$-$	0	$+$		$+$
$\mu-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{4\mu}{\mu-3}$	$+$		$-$		$+$

Αν $\mu=0$ $L=0$

Αν $\mu=3$ $L=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot(4x^2+1)}{0-999}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^2+3}{-999}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-12x^2}{999}=-\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Αφού η f συνεχής ισχύει

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)$ και $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

$ae^0=-b+2a \Leftrightarrow$

$a-2a+b=0 \Rightarrow \boxed{-a+b=0} \Rightarrow -1+b=0 \Leftrightarrow \boxed{b=1}$

και $2a=2 \Rightarrow \boxed{a=1}$

Δ2 Για $a=1$, $b=1$ έχουμε $f(x)=\begin{cases} e^{x+1}, & x<-1 \\ x^3+2, & -1\leq x\leq \\ 2\,\text{συν}x, & x>0 \end{cases}$

$A=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}-3^x}{5^x+e^{x+1+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e\cdot e^x-3^x}{5^x+e^3\cdot e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{e^x}\left[e-\left(\frac{3}{e}\right)^x\right.}{\cancel{e^x}\left[\left(\frac{5}{e}\right)^x+e^3\right.}$

$=\frac{e}{e^3}=\frac{1}{e^2}$

$B = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right) - \ln(x^4+1) \right]$

$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left[\left(\frac{2\,\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right) - \ln(x^4+1)\right]$

$\cdot \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2}{x^4+1}\right) = -\infty$ αφού $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^4+1} = 0$

$\cdot\ \Gamma = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{x^4} = 0$

αφού

$|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{2}{x^4}\sigma\upsilon\nu x\right| \leq \left|\frac{2}{x^4}\right| \Rightarrow$

$-\frac{2}{x^4} \leq \frac{2}{x^4}\sigma\upsilon\nu x \leq \frac{2}{x^4}$

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{x^4} = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} +\frac{2}{x^4} = 0$ Από κριτήριο

παρεμβολής $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{x^4} = 0$