Ενδεικτικές Λύσεις - Προσομοίωση 3. 2023

A1, A2 : Θεωρία.

A3 i) $A=[-1,7]$ $f(A)=[-1,3]$

ii) $x_0=4$

iii) Bolzano

iv) μέγιστο το 3 στην θέση $x_1=0$, ελάχιστο το -1 στην θέση $x_2=3$

A5. α. Σωστό β. Σωστό γ. Σωστό δ. Λάθος ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1-1}{x_1-2}=\frac{2x_2-1}{x_2-2}$

$\Rightarrow \cancel{2x_1x_2}-4x_1-x_2+\cancel{2}=\cancel{2x_2x_1}-4x_2-x_1+\cancel{2}$

$\Rightarrow 3x_2=3x_1 \Rightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.

Είναι $y=f(x) \Rightarrow y=\frac{2x-1}{x-2} \Rightarrow 2x-1=y\cdot x-2y \Rightarrow 2y-1=(y-2)\cdot x$

$\overset{y\neq 2}{\Rightarrow} x=\frac{2y-1}{y-2} \xRightarrow[x=f^{-1}(y)]{} f^{-1}(x)=\frac{2y-1}{y-2}$, $y\neq 2$ Οπότε $f^{-1}(x)=\frac{2x-1}{x-2}$, $x\neq 2$.

Παρατηρούμε πως $f^{-1}=f$.

B2. Για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει

$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_f \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 2 \\ \frac{2x-1}{x-2}\neq 2 \Rightarrow 2x-1\neq 2x-4 \Rightarrow -1\neq -4, \text{ισχύει} \end{cases}$ Άρα $D_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{2\}$

Είναι $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \dfrac{2f(x)-1}{f(x)-2} = \dfrac{2\,\dfrac{2x-1}{x-2}-1}{\dfrac{2x-1}{x-2}-2} = \dfrac{\dfrac{4x-2-x+2}{x-2}}{\dfrac{2x-1-2x+4}{x-2}}$

$\Rightarrow (f\circ f)(x) = \dfrac{3x-2+2}{-1+4} = \dfrac{3x}{3} = x \Rightarrow (f\circ f)(x) = x, \ x \in \mathbb{R}-\{2\}$.

Οι συναρτήσεις $g(x)=x$ και $(f\circ f)(x)$ δεν είναι ίσες, καθώς έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμού. Είναι $D_g = \mathbb{R}$ και $D_{f\circ f} = \mathbb{R}-\{2\}$

B3. $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|e^x - x - 2| + \eta\mu x - 1}{x + \sigma\upsilon\nu x - 1}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - x - 2) = -2 < 0$ άρα $e^x - x - 2 < 0$ "κοντά" στο $x=0$.

και $|e^x - x - 2| = -e^x + x + 2$.

Άρα $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^x + x + 2 + \eta\mu x - 1}{x + \sigma\upsilon\nu x - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^x + 1 + \sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} = \dfrac{-1+1+1}{1-0} = 1$

Για το $L_2 = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-1}{x-2}$ χρειαζόμαστε πλευρικά όρια.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\left((2x-1)\dfrac{1}{x-2}\right) \overset{x-2<0}{=\!=} 3\cdot(-\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\left((2x-1)\dfrac{1}{x-2}\right) \overset{x-2>0}{=\!=} 3\cdot(+\infty) = +\infty$

Το όριο L_2 δεν υπάρχει.

B4. Είναι $f(x)=\frac{h(x)}{a-x} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-2}=\frac{e^x-x}{a-x} \Leftrightarrow (2x-1)(a-x)-(e^x-x)(x-2)=0$

Θεωρώ $\phi(x)=(2x-1)(a-x)-(e^x-x)\cdot(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$

- Η ϕ είναι συνεχής στο $[2,a]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $\phi(2)=3\cdot(a-2)>0$ αφού $a>2$

  $\phi(a)=-(e^a-a)(a-2)<0$ διότι $a-2>0$ και

  από εφαρμογή σχολικού: $\ln x\leq x-1$, το "=" μόνο για $x=1$.

  Για $x\to e^x$: $\ln e^x\leq e^x-1 \Leftrightarrow x\leq e^x-1 \Leftrightarrow e^x\geq x+1$

  το "=" μόνο για $x=0$. Για $x=a\neq 0$: $e^a>a+1>a \Rightarrow e^a-a>0$.

Από Θεώρημα Bolzano η $\phi(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{h(x)}{a-x}$ έχει μια τουλ. ρίζα στο διάστημα $(2,a)$

Θέμα Γ

Γ1. $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=-6 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}=-6$

$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-6$

$\Leftrightarrow f'(2)-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-6 \overset{-h=k}{\Longleftrightarrow} f'(2)-\lim_{k\to 0}\frac{f(2+k)-f(2)}{-k}=-6$

$\Leftrightarrow f'(2)+\lim_{k\to 0}\frac{f(2+k)-f(2)}{k}=-6 \Leftrightarrow f'(2)+f'(2)=-6$

$\Leftrightarrow 2\cdot f'(2)=-6 \Leftrightarrow f'(2)=-3$

Είναι $f(x)=\frac{4}{x-1}+ax$, $x\neq 1$ άρα $f'(x)=-\frac{4}{(x-1)^2}+a$.

Ισχύει $f'(2)=-3 \Leftrightarrow -\frac{4}{1^2}+a=-3 \Leftrightarrow a=1$.

Γ2 i) $f(x)=\frac{4}{x-1}+x$, $f'(x)=-\frac{4}{(x-1)^2}+1$ και $f''(x)=\frac{4\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4}$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{8(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{8}{(x-1)^3}$, $x\neq 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	‖	$+$
f'	$\searrow$	‖	$\nearrow$

▷ $A_1=(-\infty,1)$

$f'(A_1)\underset{\text{συνεχής}}{\overset{\searrow}{=}}\left(\lim\limits_{x\to 1^-}f'(x),\lim\limits_{x\to -\infty}f'(x)\right)=(-\infty,1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{-4}{(x-1)^2}+1\right)=-\infty+1=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{-4}{(x-1)^2}+1\right)=0+1=1$

▷ $A_2=(1,+\infty)$, $f'(A_2)\underset{\text{συνεχής}}{\overset{\nearrow}{=}}\left(\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x),\lim\limits_{x\to +\infty}f'(x)\right)=(-\infty,1)$

αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-\frac{4}{(x-1)^2}+1\right)=-\infty+1=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{-4}{(x-1)^2}+1\right)=0+1=1$.

Είναι $f'(A)=f'(A_1)\cup f'(A_2)=(-\infty,1)$

ii) Έστω πως η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_1,f(x_1))$ με $x_1\neq 1$ είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της C_g στο $K(x_2,f(x_2))$, $x_2>0$

Θα πρέπει $f'(x_1)=g'(x_2)$. (1)

Είναι $g'(x)=x+1-\ln x+x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=x-\ln x\geq 1$ αφού

ισχύει $\ln x\leq x-1 \Leftrightarrow 1\leq x-\ln x$, $\forall x>0$.

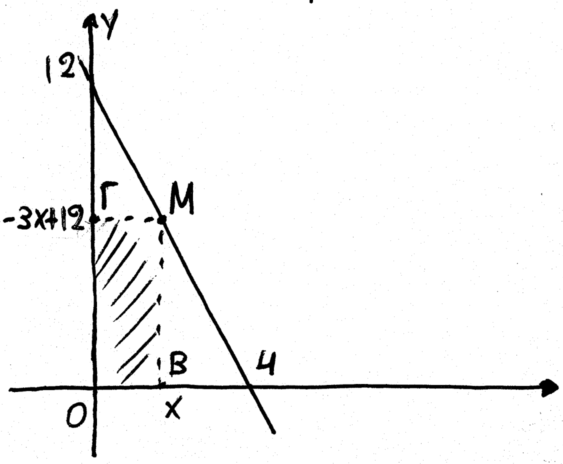
Οπότε $g'(x_2) \ge 1$ και $f'(x_1) < 1$ αφού $f'(A) = (-\infty, 1)$.

Έχουμε λοιπόν: $f'(x_1) < 1 \le g'(x_2) \Rightarrow f'(x_1) < g'(x_2)$

δηλ. η ① αδύνατη.

Οπότε οι C_f, C_g δεν έχουν παράλληλες εφαπτόμενες.

Γ3. Η (ε): $y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Rightarrow y-6 = -3(x-2) \Rightarrow y = -3x+12$



Σχεδιάζουμε την (ε) και το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$(MBO\Gamma) = E(x) = (OB)\cdot(MB) = x\cdot(-3x+12)$

$\Rightarrow E(x) = -3x^2+12x, \quad x\in(0,4)$

Ισχύει $E'(x) = -6x+12$ και $E'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$.

Το E μέγιστο για $x=2$. Το ζητούμενο σημείο είναι το $M(2, -3\cdot 2+12) \to M(2,6)$

x	0		2		4
E'		+	0	−	
E		↗	ο.μ	↘	

Γ4. Είναι $\frac{f(x)}{x} = \frac{4}{x^2-x} + 1 = \frac{4}{x(x-1)} + 1$.

Οπότε $\int_2^4 \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_2^4 \frac{4}{x(x-1)}\,dx + \int_2^4 1\,dx = I$

Έστω πραγματικοί αριθμοί Κ, Λ ώστε: $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x} = \frac{4}{x(x-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A\cdot x + B(x-1) = 4 \Leftrightarrow (A+B)x - B = 0x+4$

$\Leftrightarrow \begin{cases}A+B=0\\ -B=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=4\\ B=-4\end{cases}$

Είναι λοιπόν: $\int_2^4 \frac{4}{x(x-1)}dx = \int_2^4 \left(\frac{4}{x-1} - \frac{4}{x}\right)dx = 4\left[\ln|x-1| - \ln|x|\right]_2^4$

$= 4\left(\ln 3 - \ln 4 - (\ln 1 - \ln 2)\right) = 4\left(\ln 3 - 2\ln 2 + \ln 2\right) = 4\cdot \ln\frac{3}{2}$

και $\int_2^4 1\,dx = [x]_2^4 = 2$. Οπότε $I = 4\cdot\ln\frac{3}{2} + 2$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1), & x<0 \\ x\cdot ημx, & 0 \le x \le π \end{cases}$$

Δ1 i) Η f συνεχής στο $[0,π]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

Η f παρ/μη στο $(0,π)$ με $f'(x) = ημx + x\cdot συνx$

$f(0) = 0\cdot ημ0 = 0$

$f(π) = π\cdot ημπ = 0$ Άρα $f(0) = f(π)$

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο $[0,π]$.

ii) Από Δ1 i) υπάρχει $x_0 \in (0,π)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.

- Για $x \in (0, \frac{π}{2})$ είναι $x>0$, $ημx, συνx > 0$ άρα $f'(x) > 0$ και έτσι $x_0 \notin (0, π/2)$
- Για $x = \frac{π}{2}$: $f'(\frac{π}{2}) = ημ\frac{π}{2} + \frac{π}{2}συν\frac{π}{2} = 1$ άρα $x_0 \neq \frac{π}{2}$.

Επομένως υπάρχει $x_0 \in (\frac{π}{2}, π)$ ώστε:

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow ημx_0 + x_0 συνx_0 = 0$

$\xLeftrightarrow[\text{για } x\in(\frac{π}{2},π)]{:συνx \neq 0} \frac{ημx_0}{συνx_0} + x_0 = 0 \Leftrightarrow εφx_0 + x_0 = 0$

Δ2. Δείξαμε στο Δ1 ii) πως $f'(x)>0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Είναι $f''(x) = +\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x - x\cdot \eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu x - x \cdot \eta\mu x$, για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $\sigma\upsilon\nu x < 0$ και $\eta\mu x > 0 \Rightarrow -x\,\eta\mu x < 0$

οπότε $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \downarrow \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Ισχύει $x < x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$

$x > x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		x_0		π
f'		+		+	0	−	
f		↗		↗		↘	

Άρα $f \uparrow (0, x_0]$ και $f \downarrow [x_0, \pi]$

Το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο

Είναι $f(x_0) = -\frac{\eta\mu x_0}{\varepsilon\varphi x_0} \Leftrightarrow x_0 \cdot \cancel{\eta\mu x_0} = -\cancel{\eta\mu x_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi x_0} \overset{:\eta\mu x_0 > 0}{\Longleftrightarrow} x_0 = -\varepsilon\varphi x_0$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x_0 + x_0 = 0$, ισχύει

Δ3. Εξετάζω πρώτα αν ορίζεται η εφαπτομένη της f στο $x_0 = 0$

δηλ αν η f παραγ/μη στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \eta\mu x - 0}{x} = \eta\mu 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(x^2+1) - 0}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Άρα η f παραγ/μη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 0$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ είναι:

(ε) $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Rightarrow y-0=0\cdot x \Rightarrow y=0$ δηλ ο άξονας $x'x$

Είναι $g(0)=e^0 f(0)=0$ και $g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}\cdot f'(x)$

άρα $g'(0)=-e^0 f(0)+e^0 f'(0)=f'(0)=0$

δηλ η εφαπτομ. της C_g στο $x_0=0$ είναι επίσης ο $x'x$.

Δ4. Ισχύει $\displaystyle\int_0^{x_0} f''(x)\cdot συνx\,dx=[f'(x)\cdot συνx]_0^{x_0}-\int_0^{x_0} f'(x)(-ημx)\,dx$

$\displaystyle= \cancelto{0}{f'(x_0)}\cdot συνx_0 - \cancelto{0}{f'(0)}\,συν0 + \int_0^{x_0} f'(x_0)\cdot ημx\,dx$

$\displaystyle= \int_0^{x_0} f'(x_0)\cdot ημx\,dx$

Από Δ2 $f'(x)\geq 0$, για $x\in[0,x_0]$, το "=" μόνο για $x=0$ και $x=x_0$

και $ημx\geq 0$, για $x\in[0,x_0]\subseteq[0,\pi)$, το "=" μόνο για $x=0$

άρα $f'(x)\cdot ημx\geq 0$, για $x\in[0,x_0]$, το "=" μόνο για $x=0$ ή $x=x_0$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^{x_0} f''(x)ημx\,dx>0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} f''(x)συνx\,dx>0$

Καλά αποτελέσματα