

3^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 14 ΜΑΪΟΥ 2023

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ

ΔΥΝΑΤΗ ΑΠΟΧΩΡΗΣΗ 18:30

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

(Μονάδες 7)

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

(Μονάδες 4)

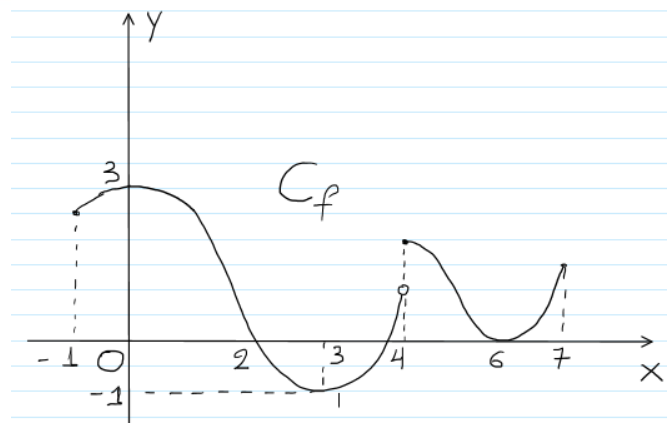
A3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις και να τις συμπληρώσετε ώστε να προκύψουν μαθηματικά αληθείς προτάσεις.

i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = \underline{\hspace{2cm}}$, ενώ το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

ii. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο της $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

iii. Στο διάστημα $[0, 3]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος $\underline{\hspace{2cm}}$.

iv. Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $\underline{\hspace{2cm}}$ στην θέση $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\underline{\hspace{2cm}}$ στην θέση $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.



(Μονάδες 4)

A5. Να χαρακτηρίσετε τος παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

α. Μια γραμμή μπορεί να αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, όταν κάθε κατακόρυφη ευθεία την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο

β. Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ με την γραφική παράσταση της f .

γ. Αν $c > 0$ τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c \, dx$, $\alpha < \beta$, εκφράζει το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c .

δ. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$, ισχύει η συνεπαγωγή : αν $f(x_1) \neq f(x_2)$ τότε $x_1 \neq x_2$.

ε. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f''(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά καμπή στο x_0 .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ και $h(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$

B1. Να δείξετε πως η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε την συνάρτηση $(f \circ f)(x)$ και να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ f$ και $g(x) = x$, είναι ίσες.



Μονάδες 5+2

B3. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|h(x) - 2| + \eta \mu x - 1}{x + \sigma \nu \eta x - 1} \quad \text{και} \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Μονάδες 4+4

B4. Να δείξετε πως η εξίσωση $f(x) = \frac{h(x)}{\alpha - x}$, $\alpha > 2$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοιχτό διάστημα $(2, \alpha)$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μία συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x-1} + \alpha \cdot x$, $x \neq 1$.

Δίνεται ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} = -6$.

Γ1. Να δείξετε πως $f'(2) = -3$ και να βρείτε το α .

(μονάδες 4+2)

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε πως $\alpha=1$:

Γ2.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f'(x)$

ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της f και της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + x \cdot (1 - \ln x), x > 0, \text{ δεν έχουν παράλληλες εφαπτομένες.}$$

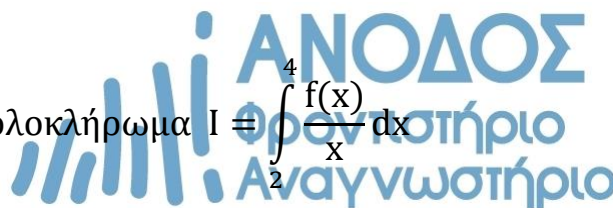
(μονάδες 3+4)

Γ3. Έστω $M(x, y), x \in (0, 4)$, σημείο της εφαπτομένης (ε) της f στο $x = 2$.

Από το M φέρνουμε κάθετες στους άξονες $x'x$ και $y'y$ που τους τέμνουν στα σημεία B, Γ αντιστοίχως. Να βρείτε το M , ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου $MBO\Gamma$ να είναι μέγιστο.

(Μονάδες 6)

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_2^4 \frac{f(x)}{x} dx$



(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1), x < 0 \\ x \cdot \eta\mu x, 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Δ1.

i. Να δείξετε πως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο $[0, \pi]$.

ii. Να δείξετε πως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ώστε $\varepsilon\phi x_0 + x_0 = 0$.

(Μονάδες 3+5)

Δ2. Να αποδείξετε πως η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 το $f(x_0) = -\frac{\eta\mu x_0}{\sigma\phi x_0}$.

(Μονάδες 4+4)

Δ3. Να αποδείξετε πως οι συναρτήσεις f και g , όπου $g(x) = e^{-x} \cdot f(x)$, έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα $x'x$, στο σημείο τους με τετμημένη $x=0$.

(Μονάδες 4)

Δ4. Να αποδείξετε πως $\int_0^{x_0} f''(x) \cdot \sin x \, dx > 0$.

(Μονάδες 5)

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στην κόλλα σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ