

## 2<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 3 ΩΡΕΣ

ΚΥΡΙΑΚΗ 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2023

Ώρα δυνατής αποχώρησης : 10:30'

### ΘΕΜΑ Α

A. Να αποδείξετε πως αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x)=0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η συνάρτηση  $f$  είναι σταθερή σε όλο το  $\Delta$ .

(Μονάδες 6)

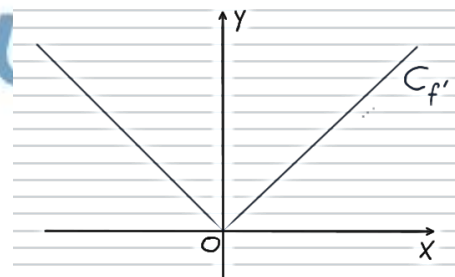
A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

(Μονάδες 4)

A3. Έστω συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  και ένα σύστημα συντεταγμένων  $xOy$ . Τι ονομάζεται γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ ;

(Μονάδες 3)

A4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f$ .



Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθής;

- Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση
- Η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x=0$
- Η  $f$  είναι κυρτή στο  $(-\infty, 0]$

(Μονάδες 2)

A5. Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

α. Αν  $\alpha > 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

β. Έστω  $f$  συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ . Ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$$

γ. Ισχύει  $(\sin x)' = \eta\mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

δ. Οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x^2$  και  $g(x) = 2 \ln x$  είναι ίσες.

ε. Αν η  $f$  είναι συνάρτηση "ένα προς ένα" δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με ίδια τεταγμένη.

(Μονάδες 10)

### **ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , πολυωνυμική β' βαθμού. Το σημείο  $K(0, -3)$  ανήκει στην γραφική της παράσταση ενώ η εφαπτομένη της στο  $x = -2$  είναι παράλληλη στον  $x'$ . Δίνεται επίσης πως  $f''(2023) = 2$

**B1.** Να δείξετε πως  $f(x) = x^2 + 4x - 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

**B2.** Να υπολογιστεί το όριο  $T = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{(\mu - 1)x^3 + 2\mu x^2 + 1}$ , για τα διάφορα  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g(x) = \sqrt{x - 2}$ ,  $x \geq 2$ .

**B3.** Να δείξετε πως η  $g$  αντιστρέφεται και πως η αντίστροφή της έχει τύπο

$$g^{-1}(x) = x^2 + 2, x \geq 0.$$

Μονάδες 2+3

Έπειτα να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των  $g$ ,  $g^{-1}$  στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Μονάδες 3

**B4.** Να ορίσετε την  $h(x) = (g \circ f)(x)$  και να δείξετε πως η ευθεία  $y = x + 2$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$ .

Μονάδες 3+3

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

**Γ1.** Να δειχθεί πως είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

(μονάδες 7)

**Γ2. i)** Να δείξετε πως  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}, x > 0$

ii) Να δείξετε πως η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.  
(μονάδες 3+3)

**Γ3.** Έστω η εξίσωση :  $f\left(\int_{2023}^{2023} \ln x \cdot \sin x \, dx + \eta \mu x\right) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right), x > 1$

i. Να δείξετε πως η παραπάνω εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα  $\rho_1$  στο  $(1, \pi)$  και μία τουλάχιστον ρίζα  $\rho_2$  στο  $(\pi, \frac{5\pi}{2})$   
(μονάδες 3)

ii. Να δείξετε πως υπάρχει  $\xi \in (1, \frac{5\pi}{2})$  τέτοιο ώστε  $\sin \xi = \frac{2}{(\xi+1)^2}$   
(μονάδες 4)

**Γ4.** Αν  $E$  το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 1, x = 3$  να αποδείξετε πως  $E > 2 - \ln 2$ .  
(μονάδες 5)

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει ότι

- $x^2 \cdot (f(x) - f'(x)) = e^x, (1)$ , για κάθε  $x > 0$
- $f(1) = e$

**Δ1.** Να δείξετε πως η συνάρτηση  $g(x) = e^{-x} \cdot f(x) - \frac{1}{x}, x > 0$ , είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της  $f$ .

(Μονάδες 4+2)

Αν  $f(x) = \frac{e^x}{x}, x > 0$

**Δ2.** i. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$ .

ii. Να δείξετε πως η εξίσωση  $f(x) = f(2)$  έχει ακριβώς μία ρίζα  $x_0 \in (0,1)$

(Μονάδες 3+5)

**Δ3.** Να δείξετε πως η  $f$  είναι κυρτή και πως ισχύει :

$$f(x) \leq f'(x) \cdot (x - 1) + e, \text{ για κάθε } x > 0$$

(Μονάδες 3+4)

**Δ4.** Να δείξετε πως από το σημείο  $\Delta(1,3)$  δεν άγεται καμία εφαπτομένη προς την  $C_f$ .

(Μονάδες 4)

### **ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στην κόλλα σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**