

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$

(Μονάδες 5)

A2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέμε ότι είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

(Μονάδες 6)

A3. Αν $f(x) = 5^{3x}$, τότε η παράγωγος της f είναι ίση με

α. $f'(x) = 3x \cdot 5^{3x-1}$ β. $f'(x) = 3 \cdot 5^{2x}$ γ. $f'(x) = 5^{3x} \cdot \ln 125$

δ. $f'(x) = 5^{3x} \cdot \ln 5$

Επιλέξτε.

(Μονάδες 5)

A4. Δίνεται η πρόταση

«Αν ισχύει $(f \cdot g)(x) = 0$, για κάθε $x \in A$, τότε θα ισχύει υποχρεωτικά $f(x) = 0$, για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.»

Η πρόταση αυτή είναι ΑΛΗΘΗΣ Ή ΨΕΥΔΗΣ; Αιτιολογήστε.

(Μονάδες 1+3)

A5. Να χαρακτηρίσετε τος παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

α. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο κατά δύο τουλάχιστον

μονάδες απ' τον βαθμό του παρονομαστή δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

β. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

γ. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε θα ισχύει κατ'ανάγκη $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

δ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

ε. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ τότε η ευθεία $x = l$ είναι κατακόρυφη ασύπτωτη της C_f

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = x \cdot \ln x + c \cdot x + 1$, $x > 0$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $A(e, g(e))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: x - y + 2024 = 0$.

B1. Να δείξετε πως $c = -1$

Μονάδες 6

B2. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ και να δείξετε ότι $x^x \geq e^{x-1}$, για $x > 0$

Μονάδες 3+3+3

B4. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου ανάμεσα στην C_g , τον x και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \lambda x, & x < 1 \\ x^2 + k, & x \geq 1 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $k = \lambda = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. i. Να δείξετε πως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική αρνητική ρίζα x_0 .

ii. Να δείξετε πως η εξίσωση :

$$(1 - x^4) \cdot (x_0 - \eta\mu x_0) = x^3 \cdot \frac{f(x_0 + 2022)}{x_0}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοιχτό διάστημα (0,1).

Μονάδες 4+6=10

Γ4. Να δείξετε ότι $\int_{-1}^0 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx > -\ln 2$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x + x^2 - 3x + 2$.

Για το α δίνεται επίσης ότι $\eta\mu x \leq \ln(x + 1) + x^2$, για κάθε $x > -1$

Δ1. Να δείξετε πως $\alpha=1$ και να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4+4

Δ2. i. Να δείξετε πως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = x \cdot \ln x$

$h(x) = 3x - x^2 - 2$, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 4

ii. Να δείξετε ότι $3x - x^2 - 1 \leq x \leq 1 + x \ln x$. Πότε ισχύουν τα "=";

Μονάδες 4

Δ3. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > f(3)$

Μονάδες 5

Έστω F μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$.

Δ4. Να δείξετε πως ισχύει

$$F(e^{|x|} + 1) - F(|x| + 2) \geq F(e^{|x|}) - F(|x| + 1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

ΕΥΧΟΜΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Γιώργος Γιαννακόπουλος