ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2 : Θεωρία

Α3. γ.

Α4. Ψευδής.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=|x|-x,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=|x|+x,\ x\in\mathbb{R}$
έχουν $f(x)\cdot g(x)=(|x|-x)(|x|+x)=|x|^2-x^2=|x|^2-|x|^2=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
αλλά καμιά τους δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

Α5. α. Σωστό β. Λάθος γ. Λάθος δ. Σωστό ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται πως $\lambda_{εφ}=\lambda_{η}=1$ άρα $g'(e)=1$.

Είναι $g'(x)=\ln x+1+c$ οπότε $g'(e)=1 \Rightarrow \ln e+\cancel{1}+c=\cancel{1} \Rightarrow c=-1$.

Οπότε $g(x)=x\ln x-x+1,\ x>0$

Β2. g συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

$g'(x)=\ln x+1-1=\ln x$

Λύνω $g'(x)=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1$.

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$	

$g \downarrow (0,1]$ και $g \uparrow [1,+\infty)$

Το $g(1)=0$, ελάχιστο της g.

B3. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x - x + 1) = 0 - 0 + 1 = 1$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(x\cdot \ln x - x + 1) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[x\left(\ln x - 1 + \frac{1}{x}\right)\right] = (+\infty)(+\infty - 1 + 0)$

$= +\infty.$

Είναι $x^x \geq e^{x-1} \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln e^{x-1} \Leftrightarrow x\cdot \ln x \geq x - 1$

$\Leftrightarrow x\cdot \ln x - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ ισχύει από B2

αφού το $g(1) = 0$ είναι ελάχιστο της $g(x)$.

B4. Ζητείται το $E = \int_1^2 |g(x)|\,dx \overset{g(x)\geq 0}{=\!=} \int_1^2 (x\ln x - x + 1)\,dx$

$E = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx + \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx + \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_1^2$

$E = 2\ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx \cancel{-2} \cancel{+2} - \left(-\frac{1}{2} + 1\right)$

$E = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - \frac{1}{2} = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 2\ln 2 - \frac{5}{4}$ τ.μ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

Συνεχής στο 1

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}(e^{x-1}+\lambda x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2+k)$$

$$\Leftrightarrow e^0+\lambda = 1+k \Leftrightarrow k=\lambda.$$

Άρα $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+\lambda x, & x<1 \\ x^2+\lambda, & x\geq 1 \end{cases}$

Παραγωγίσιμη στο 1

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\lambda x-(1+\lambda)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\lambda-(1+\lambda)}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\lambda x-1-\lambda}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}$$ Μορφές $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζω DLH

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\lambda}{1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{1} \Leftrightarrow e^0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=1$$ άρα $k=1$.

Επομένως $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+x, & x<1 \\ x^2+1, & x\geq 1 \end{cases}$

Γ2. Για $x<1$: $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$

Για $x \geq 1$: $f'(x) = 2x > 0$ για κάθε $x \geq 1$

Άρα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δηλ. $f \uparrow \mathbb{R}$

$f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$ αφού:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1} + x\right) = 0 + (-\infty) = -\infty$ διότι

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} \overset{y=x-1}{=\!=} \lim\limits_{y\to-\infty} e^{y} = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right) = +\infty$

Γ3. i) Το $0 \in f(A)$ οπότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$.

Η $f \uparrow \mathbb{R}$ και 1-1 οπότε η ρίζα μοναδική.

Είναι $x_0 < 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(0) \Leftrightarrow 0 < e^{0-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{e}$, ισχύει.

Άρα η ρίζα αρνητική.

ii) Θεωρούμε $\phi(x) = (1-x^4)(x_0 - \eta\mu x_0) - x^3 \dfrac{f(x_0+2022)}{x_0}$

• Η ϕ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών.

• $\phi(0) = x_0 - \eta\mu x_0 < 0$ διότι $|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq \eta\mu x \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Το "=" μόνο για $x=0$

Για $x = x_0 < 0$ $(|x_0| = -x_0)$ έχουμε

$\underbrace{x_0 < \eta\mu x_0}_{} < -x_0 \Leftrightarrow x_0 - \eta\mu x_0 < 0$.

$\bullet\ \phi(1) = -1^3 \dfrac{f(x_0+2022)}{x_0} > 0$ διότι $x_0+2022 > x_0 \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}$

$f(x_0+2022) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0+2022) > 0$

$\overset{\cdot(-1)}{\Longleftrightarrow} -f(x_0+2022) < 0$

$\overset{:x_0<0}{\Longleftrightarrow} -\dfrac{f(x_0+2022)}{x_0} > 0 \Leftrightarrow \phi(1) > 0$

Οπότε $\phi(0)\cdot\phi(1) < 0$.

Από Θ. Bolzano η $\phi(x)=0$ έχει μια τουλ. ρίζα στο $(0,1)$.

Γ4. Για $x \in [-1, 0]$ $f(x) = e^{x-1} + x$.

Ισχύει $e^x \geq x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, το "=" μόνο για $x=0$.

Για $x \to x-1$: $e^{x-1} \geq x-1+1 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x$, το "=" μόνο για $x-1=0 \Leftrightarrow$ $x=1$.

$\overset{+x}{\Longleftrightarrow} e^{x-1} + x \geq 2x \Leftrightarrow f(x) \geq 2x$

$\overset{:(x^2+1)>0}{\Longleftrightarrow} \dfrac{f(x)}{x^2+1} \geq \quad \Longrightarrow \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx > \int_{-1}^{0} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx > \left[\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{0} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $ημαx - \ln(x+1) - x^2 \leq 0$ Θεωρώ $φ(x) = ημαx - \ln(x+1) - x^2$, $x > -1$

και $φ(0) = ημ0 - \ln 1 - 0 = 0$

Άρα η δοσμένη γράφεται: $φ(x) \leq φ(0)$, για κάθε $x > -1$

Η $φ$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$

με $φ'(x) = ασυναx - \frac{1}{x+1} - 2x$.

Από Θ. Fermat: $φ'(0) = 0 \Leftrightarrow ασυνα\cdot 0 - \frac{1}{0+1} - 2\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow α\cdot συν0 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow α = 1$.

Άρα $f(x) = x\cdot \ln x + x^2 - 3x + 2$

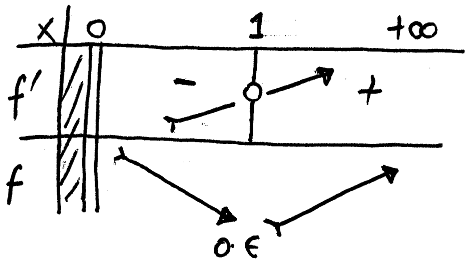
Η f συνεχής στο $A = (0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

$f'(x) = \ln x + 1 + 2x - 3 = \ln x + 2x - 2$. Είναι $f'(1) = \ln 1 + 2\cdot 1 - 2 = 0$

$f''(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα $f' \uparrow A$.

Για $x < 1 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x) < f'(1) = 0$

Για $x > 1 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x) > f'(1) = 0$



Άρα $f \downarrow (0,1]$ και $f \uparrow [1, +\infty)$

Το $f(1) = 1\cdot \ln 1 + 1 - 3 + 2 = 0$ ελάχιστο της f.

Δηλαδή $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Το "=" μόνο για $x = 1$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Δ2. i) Έστω πως x_0 η τετμημένη του κοινού σημείου

Πρέπει $\begin{cases} g(x_0)=h(x_0) \\ g'(x_0)=h'(x_0) \end{cases}$ $\begin{cases} x_0\ln x_0 = -x_0^2+3x_0-2 \\ \ln x_0+1=3-2x_0 \end{cases}$ $\begin{cases} f(x_0)=0 \\ f'(x_0)=0 \end{cases} \overset{\Delta 1.}{\Leftrightarrow} x_0=1$

Οπότε έχουν κοινή εφαπτομένη (μοναδική) στο $(1,g(1)) \to (1,0)$

την (ε) $y-g(1)=g'(1)(x-1) \Rightarrow y-0=1(x-1) \Rightarrow y=x-1.$

ii) Είναι $g''(x)=\frac{1}{x}>0, \forall x>0$ άρα g κυρτή

$h''(x)=-2<0$ άρα h κοίλη.

Ισχύει λοιπόν $\begin{cases} g(x)\geq x-1, \text{ για κάθε } x>0 \\ h(x)\leq x-1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \end{cases}$ αφού η $y=x-1$ εφαπτομένη στο $x_0=1$.

Το "=" ισχύει και στις 2 περιπτώσεις για $x=1$ (σημείο επαφής)

Άρα $h(x)\leq x-1\leq g(x) \Leftrightarrow 3x-x^2-2\leq x-1\leq x\cdot\ln x$

$\overset{+1}{\Leftrightarrow} 3x-x^2-1\leq x\leq x\cdot\ln x+1.$

Δ3. Για $x\geq 1$ $f(x)>f(3) \overset{f\uparrow[1,+\infty)}{\Longleftrightarrow} x>3.$

Για $x\in(0,1)$ Παρατηρώ πως $f(3)=3\ln 3+2$

Είναι $f((0,1)) \overset{\downarrow}{=} \left(\lim_{x\to 1^-}f(x), \lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=(0,2)$

διότι $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}x=0$ άρα $\lim_{x\to 0^+}f(x)=2$

Επομένως $f(x)<2$, για $x\in(0,1)$ ενώ $f(3)=2+3\ln 3>2$ διότι $3>1 \Rightarrow$
$\ln 3>0 \Rightarrow$
$3\ln 3>0 \Rightarrow$
$3\ln 3+2>2$.

Οπότε $f(x)<2<f(3) \Rightarrow f(x)<f(3)$, για $x\in(0,1)$.

Η ανίσωση $f(x)>f(3)$, αδύνατη για $x\in(0,1)$.

Τελικά $\boxed{f(x)>f(3) \Leftrightarrow x>3}$

Δ4. Αφού F παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$ θα ισχύει: $F'(x)=f(x),\ \forall x\geq 1$.

Η δοσμένη ανισότητα γράφεται:

$$F(e^{|x|}+1)-F(e^{|x|})\geq F(|x|+2)-F(|x|+1) \quad (2)$$

Θεωρώ $K(x)=F(x+1)-F(x)$ με $x\geq 1$.

$$K'(x)=F'(x+1)-F'(x)=f(x+1)-f(x).$$

όμως $f\uparrow [1,+\infty)$ άρα $x+1>x \xRightarrow{f\uparrow} f(x+1)>f(x) \Rightarrow f(x+1)-f(x)>0$

$\Rightarrow K'(x)>0$ άρα $K\uparrow [1,+\infty)$.

$(2) \Leftrightarrow K(e^{|x|})\geq K(|x|+1) \underset{\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{|x|}\geq |x|+1$, ισχύει

καθώς $e^x\geq x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Σχόλιο</u>

Είναι $|x|\geq 0 \Rightarrow e^{|x|}\geq e^0 \Rightarrow e^{|x|}\geq 1$ δηλ $e^{|x|}\in[1,+\infty)$

$|x|\geq 0 \Rightarrow |x|+1\geq 1$ δηλ $|x|+1\in[1,+\infty)$