ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α4. Αληθής η πρόταση (i) καθώς $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Α5. α. Σωστό β. Λάθος γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$

- Το $K(0,-3) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = -3$
- Στο $x=-2$ οριζόντια εφαπτομένη $\Leftrightarrow f'(-2)=0$

Είναι όμως $f'(x) = 2\alpha x + \beta$ και $f''(x) = 2\alpha$

Οπότε:

$$\begin{cases} f(0) = -3 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = -3 \Leftrightarrow \gamma = -3 \\ f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha \cdot (-2) + \beta = 0 \xRightarrow{\alpha=1} \beta = 4 \\ f''(2023) = 2 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

Οπότε $f(x) = x^2 + 4x - 3, x \in \mathbb{R}$

Β2. $$T = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x-3}{(\mu-1)x^3 + 2\mu x^2 + 1}$$

- Αν $\mu - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 1$: $T = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(\mu-1)x^3} = \frac{1}{\mu-1} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\mu-1} \cdot 0 = 0$

- Αν $\mu = 1$: $T = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x-3}{0x^3+2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$

B3. Για κάθε $x>2$: $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}>0$ και g συνεχής στο $[2,+\infty)$

οπότε $g \uparrow [2,+\infty)$ και 1-1.

Η g αντιστρέφεται.

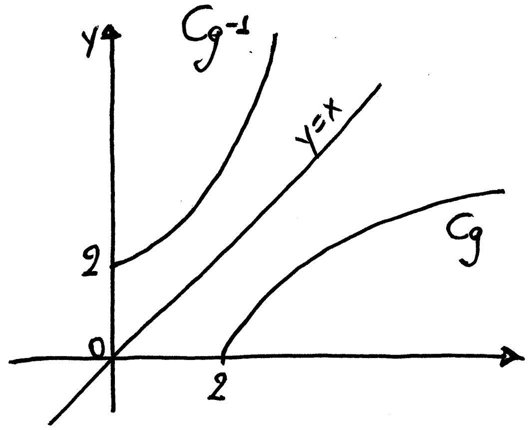
Είναι $y=g(x) \Rightarrow y=\sqrt{x-2} \xRightarrow{y\geq 0} y^2=x-2 \Rightarrow x=y^2+2$

$\xRightarrow{x=g^{-1}(y)} g^{-1}(y)=y^2+2$

$D_{g^{-1}}=g([2,+\infty)) \overset{\uparrow}{=} [g(2),\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)) = [0,+\infty)$

Οπότε $g^{-1}(x)=x^2+2,\ x\in[0,+\infty)$

Οι C_g, $C_{g^{-1}}$ φαίνονται στο διπλανό σχήμα



B4. Για να ορίζεται η gof πρέπει

$$\begin{cases} x\in D_f \Rightarrow x\in\mathbb{R} \\ f(x)\in D_g \Leftrightarrow x^2+4x-3\geq 2 \Leftrightarrow x^2+4x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-5]\cup[1,+\infty) \end{cases}$$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
x^2+4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

Είναι $(g\circ f)(x)=\sqrt{f(x)-2}=\sqrt{x^2+4x-5}$, $D_{gof}=(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$

Η $y=x+2$ ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-(x+2)\right)=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-(x+2)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-5}-(x+2)\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+4x-5}-(x+2)\right]\left[\sqrt{x^2+4x-5}+(x+2)\right]}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x-5}^{\,2}-(x+2)^2}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}+x+2}$

$$\underset{x>0}{\overset{x\to+\infty}{=\!=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x-5-(x^2+4x+4)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}+1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{-9}{\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}+1+\frac{2}{x}} = 0\cdot\frac{-9}{2}=0$$

Επομένως η $y=x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=} \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln(1+y)}{y} \underset{DLH}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=\!=}}$

$= \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{y+1}}{1} = 0 = f(0)$. Η f συνεχής στο $x_0=0$.

Βρίσκω $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\cdot\ln(1+\frac{1}{x})}{x} \overset{y=1+\frac{1}{x}}{=\!=} \lim\limits_{y\to+\infty} \ln y = +\infty \notin \mathbb{R}$

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2. Η ζητούμενη γράφεται: $\ln\dfrac{x+1}{x} > \dfrac{1}{x+1} \iff \ln(x+1)-\ln x > \dfrac{1}{x+1}$.

Θεωρούμε $g(x)=\ln x$, $x>0$ και $g'(x)=\frac{1}{x}$, $g''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, $\forall x>0$ άρα $g'\downarrow$.

Η g συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$

Από Θ.Μ.Τ υπάρχει $\alpha\in(x,x+1)$ ώστε $g'(\alpha)=\dfrac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x} = \dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{1}$

Είναι $\alpha<x+1 \overset{g'\downarrow}{\Longrightarrow} g'(\alpha)>g'(x+1) \Rightarrow \ln(x+1)-\ln x > \dfrac{1}{x+1}$, που είναι το ζητούμενο.

ii) Για $x>0$: $f'(x) = 1\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}}$

$\Rightarrow f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$ λόγω του Γ2(i).

Η f συνεχής στο $x_0=0$ άρα $f \nearrow [0,+\infty)$ και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$$D_{f^{-1}} = f\left([0,+\infty)\right) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{\nearrow}{=\!=}} \left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [0,1)$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}+1}{=\!=} \lim\limits_{y\to1} \dfrac{\ln y}{y-1}$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=}} \lim_{y\to1} \frac{\frac{1}{y}}{1} = 1$$

Γ3. Ισχύει $\displaystyle\int_{2023}^{2023} \ln x\cdot συνx\, dx = 0$ οπότε η δοσμένη είναι ισοδύναμη με:

$f(ημx) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \overset{f:1-1}{\Longleftrightarrow} ημx = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow ημx - \frac{x-1}{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow \phi(x) = 0$, όπου $\phi(x) = ημx - \dfrac{x-1}{x+1}$.

ϕ συνεχής στα $[1,\pi]$, $[\pi, \frac{5\pi}{2}]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

▷ $\phi(1) = ημ1 - 0 = ημ1 > 0$ διότι $1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $ημx>0$ για $x\in(0,\pi/2)$

$\phi(\pi) = ημ\pi - \frac{\pi-1}{\pi+1} = -\frac{\pi-1}{\pi+1} < 0$ αφού $\pi>1 \Rightarrow \pi-1>0 \Rightarrow -(\pi-1)<0$ και $\pi+1>0$.

Επομένως $\phi(1)\cdot\phi(\pi) < 0$

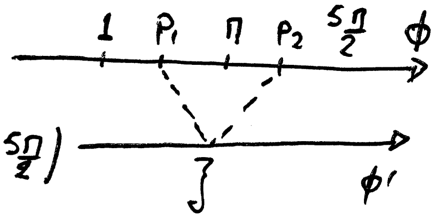
▷ $\phi\left(\frac{5\pi}{2}\right) = ημ\frac{5\pi}{2} - \dfrac{\frac{5\pi}{2}-1}{\frac{5\pi}{2}+1} = 1 - \dfrac{\frac{5\pi}{2}-1}{\frac{5\pi}{2}+1} = \dfrac{2}{\frac{5\pi}{2}+1} > 0$

Άρα $\phi(\pi)\cdot\phi\left(\frac{5\pi}{2}\right) < 0$

• Από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλ. ρίζα $\rho_1 \in (1, \pi)$ και μια τουλ. ρίζα $\rho_2 \in \left(\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ της εξίσωσης $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x - \frac{x-1}{x+1} = 0$

ii) Η ϕ συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2).

Είναι $\phi(\rho_1) = \phi(\rho_2) = 0$ οπότε από



Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλ. $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq \left(1, \frac{5\pi}{2}\right)$

ώστε $\phi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi - \frac{1(\xi+1) - 1\cdot(\xi-1)}{(\xi+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi = \frac{2}{(\xi+1)^2}$

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_1^3 |f(x)|\,dx = \int_1^3 \left|x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right| dx.$

$x \in [1,3] \Rightarrow x > 0$ και $1 + \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \ln 1 = 0.$

Άρα $x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow f(x) > 0.$

Επομένως $E = \int_1^3 x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx.$

Από την σχέση του Γ2(i) $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} \overset{\cdot x>0}{\Rightarrow} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{x}{x+1}$

$\Rightarrow \int_1^3 x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx > \int_1^3 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_1^3 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$\Rightarrow \int_1^3 f(x)\,dx > \left[x - \ln(x+1)\right]_1^3 \Rightarrow E > 3 - \ln 4 - (1 - \ln 2)$

$\Rightarrow E > 2 - (\ln 4 - \ln 2) \Rightarrow E > 2 - \ln\frac{4}{2} \Rightarrow E > 2 - \ln 2$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Είναι $x^2(f(x)-f'(x))=e^x \Leftrightarrow f(x)-f'(x)=\frac{e^x}{x^2}$ ①

Η g συνεχής στο $(0,+\infty)$ αφού ορίζεται ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$g'(x)=-e^{-x}\cdot f(x)+e^{-x}f'(x)+\frac{1}{x^2}=-e^{-x}(f(x)-f'(x))+\frac{1}{x^2}$

$\overset{①}{=}-e^{-x}\cdot\frac{e^x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=-\frac{e^0}{x^2}+\frac{1}{x^2}=0$, για κάθε $x>0$.

Οπότε η g σταθερή, δηλ. υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε $g(x)=c$, $\forall x>0$.

$g(x)=c \Rightarrow e^{-x}f(x)-\frac{1}{x}=c \xRightarrow{x=1} e^{-1}\cdot f(1)-1=c \Rightarrow \frac{1}{e}\cdot e-1=c$

$\Rightarrow c=0$. Οπότε $e^{-x}f(x)-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x}{x}$, $x>0$.

Δ2. i) Η f συνεχής στο $A=(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{e^x x-1\cdot e^x}{x^2}=\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2}$, $x>0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	e Ο.Ε	$\nearrow$	$+\infty$

Η f ↘ $A_1=(0,1]$ και συνεχής άρα $f(A_1)=[f(1),\lim\limits_{x\to0^+}f(x))=[e,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x\cdot\frac{1}{x}\right)=1\cdot(+\infty)=+\infty$

Η f ↗ $A_2=(1,+\infty)$ και συνεχής. $f(A_2)=(f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(e,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$.

Άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[e,+\infty)$

ii) Είναι $f(2)=\frac{e^2}{2}$. Το $\frac{e^2}{2}\in f((0,1))=(e,+\infty)$ διότι

$e>2 \overset{\cdot e}{\Rightarrow} e^2>2e \Rightarrow \frac{e^2}{2}>e$.

Οπότε η εξίσωση $f(x)=f(2)=\frac{e^2}{2}$ έχει μια τουλ. ρίζα $x_0\in(0,1)$.

Επειδή η $f\downarrow(0,1)$ η ρίζα x_0 μοναδική.

Δ3. $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $x>0$ και $f''(x)=\frac{[e^x(x-1)+e^x]\cdot x^2-2x[e^x(x-1)]}{(x^2)^2}$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{xe^x\cdot x^2-2xe^x(x-1)}{x^4}=\frac{xe^x(x^2-2x+2)}{x^4}=\frac{e^x}{x^3}\cdot(x^2-2x+2)$

Είναι $\frac{e^x}{x^3}>0, \forall x>0$ και το τριώνυμο $x^2-2x+2>0, \forall x>0$ αφού $\Delta=-4<0$

Οπότε $f''(x)>0, \forall x>0 \Rightarrow f$ κυρτή.

Θέλουμε να δείξουμε ότι: $f(x)-e\le f'(x)(x-1)$ ②, $x>0$

- Για $x=1$ η ② $\Leftrightarrow f(1)-e\le f'(1)(1-1) \Leftrightarrow 0\le 0$, ισχύει ως ισότητα.

- Για $x>1$: Η f συνεχής στο $[1,x]$ και παρ/μη στο $(1,x)$.

  Από ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1\in(1,x)$ με $f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)-e}{x-1}$

  Οπότε $\xi_1<x \xrightarrow{f'\uparrow} f'(\xi_1)<f'(x) \Longrightarrow \frac{f(x)-e}{x-1}<f'(x)$

  $\xrightarrow{\cdot(x-1)>0} f(x)-e<f'(x)\cdot(x-1)$, δηλ ισχύει η ② ως ανισότητα.

- Για $x<1$: Η f συνεχής στο $[x,1]$ και παρ/μη στο $(x,1)$

  Από ΘΜΤ υπάρχει $\xi_2\in(x,1)$ με $f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}\Rightarrow$

  $f'(\xi_2)=\frac{e-f(x)}{1-x}=\frac{f(x)-e}{x-1}$.

Είναι $\xi_2 > x \overset{f' \uparrow}{\Longrightarrow} f'(\xi_2) > f'(x) \Rightarrow \frac{f(x)-e}{x-1} > f'(x)$

$\overset{x-1<0}{\Longrightarrow} f(x)-e < f'(x)(x-1)$ δηλ. ισχύει η ② ως ανισότητα

Επομένως για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x) \leq (x-1)\cdot f'(x)+e$.

Το "=" μόνο για $x=1$.

Δ4. Έστω η εφαπτομένη της C_f στο $(x_1, f(x_1))$. με $x_1>0$

(ε) $y - f(x_1) = f'(x_1)(x-x_1)$ Αν διέρχεται από το $\Delta(1,3)$:

$3 - f(x_1) = f'(x_1)(1-x_1) \Leftrightarrow 3 = f(x_1) + f'(x_1)(1-x_1)$

$\Leftrightarrow f(x_1) - f'(x_1)(x_1-1) = 3.$

<u>Άτοπο</u> διότι από Δ3 για $x=x_1$:

$f(x_1) \leq (x_1-1)\cdot f'(x_1)+e \Leftrightarrow f(x_1)-(x_1-1)\cdot f'(x_1) \leq e < 3$

$\Leftrightarrow f(x_1)-(x_1-1)\cdot f'(x_1) < 3.$

Άρα δεν άγεται εφαπτομένη από το Δ.