# ΘΕΜΑ Α

$A1, A_2$ : Θεωρία

$A_3$ : α. Σωστό β. Σωστό γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Σωστό

$A_4$: α) Καλά ορισμένα τα $\boxed{α}$ και $\boxed{δ}$

β) Σωστή απάντηση το (ii) καθώς $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-3}{2(x-1)}$ $\begin{cases} -\infty & (x\to 1^+) \\ +\infty & (x \to 1^-) \end{cases}$

# ΘΕΜΑ Β

Β1. $(g\circ f)(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7$ όμως $g(x) = 2x+3 \Rightarrow g(f(x)) = 2f(x)+3$

Οπότε $2f(x)+3 = 2x^3-6x^2+7 \Rightarrow f(x) = x^3-3x^2+2$.

Β2. Η $f$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Ισχύει $f'(x) = 3x^2-6x = 3x(x-2)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Η $f$ ↑ $(-\infty, 0]$ και $[2,+\infty)$

$f$ ↓ $[0,2]$

Το $f(0)=2$ τοπικό μέγιστο και το $f(2)=-2$ τοπικό ελάχιστο της $f$

$f''(x) = 6x-6 = 6(x-1)$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\frown$ | σκ | $\smile$ | |

Η $f$ κοίλη στο $(-\infty, 1]$ και κυρτή στο $[1,+\infty)$

Το $M(1, f(1))$ δηλ $M(1,0)$ σημείο καμπής της $C_f$.

Β3.(i) Είναι $A(0,f(0)) \to A(0,2)$

$B(2,f(2)) \to B(2,-2)$ και $Γ \equiv M(1,0)$ δηλ $Γ(1,0)$

$\vec{AB} = (2-0, -2-2) = (2, -4)$ και $\lambda_{\vec{AB}} = \frac{-4}{2} = -2$

$\vec{A\Gamma} = (1-0, 0-2) = (1, -2)$ $\quad \lambda_{\vec{A\Gamma}} = \frac{-2}{1} = -2 = \lambda_{\vec{AB}}$

Οπότε $\vec{AB} \parallel \vec{A\Gamma} \Rightarrow A, B, \Gamma$ συνευθειακά.

(ii) Η εφαπτομένη είναι $(\varepsilon)$ $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$$y - 0 = -3(x-1)$$

$$y = -3x+3$$

Αρκεί να δείξουμε πως υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{cases} h(x_0) = -3x_0+3 \\ h'(x_0) = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} e^{x_0-2} - 4x_0 + 4 = -3x_0 + 3 \\ e^{x_0-2} - 4 = -3 \Leftrightarrow e^{x_0-2} = 1 \Leftrightarrow e^{x_0-2} = e^0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_0-2} - x_0 + 1 = 0 \\ x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \end{cases}$$

Το 2 επαληθεύει και την 1η εξίσωση: $e^{2-2} - 2 + 1 = 0$

Οπότε η $(\varepsilon)$ εφάπτεται στην $C_h$ στο $x_0 = 2$.

B4. $A_1 = (-\infty, 0]$ $\quad f(A_1) \overset{\nearrow}{=} \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 2]$

$A_2 = (0, 2]$ $\quad f(A_2) \overset{\searrow}{=} [f(2), f(0)) = [-2, 2)$

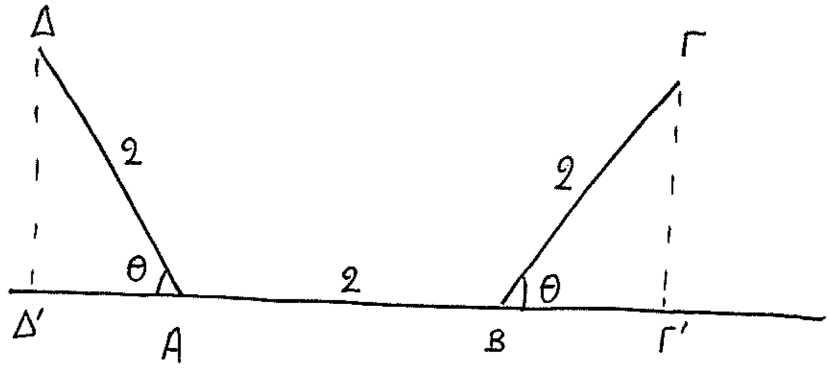
$A_3 = (2, +\infty)$ $\quad f(A_3) \overset{\nearrow}{=} \left(f(2), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = (-2, +\infty)$

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = (-\infty, +\infty)$$

Το $e \notin f(A_1)$ και $e \notin f(A_2)$ οπότε η $f(x) = e$ αδύνατη για $x \in A_1 \cup A_2$.

Για $x \in A_3$: $e \in f(A_3)$ οπότε υπάρχει ρίζα της $f(x) = e$ στο $A_3$.
Η $f \nearrow A_3$ οπότε η ρίζα μοναδική. Τελικά $f(x) = e$, 1 ρίζα.

## ΘΕΜΑ Γ




Γ1. Φέρουμε $\Delta\Delta' = \Gamma\Gamma'$ ύψη του ΑΒΓΔ τραπεζίου

Είναι $\Delta'A = B\Gamma'$ διότι τα $\overset{\triangle}{A\Delta\Delta'}$ και $B\Gamma\Gamma'$ είναι ίσα (ορθογώνια – $\hat{A} = \hat{B}$ – $A\Delta = B\Gamma$)

$$E_{\tau\rho\alpha\pi} = \frac{(\Gamma\Delta + AB)\cdot\Gamma\Gamma'}{2} = \frac{(\Gamma\Delta + 2)\cdot\Gamma\Gamma'}{2} \quad (1)$$

Στο $\Gamma\overset{\triangle}{B}\Gamma'$ : $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{B\Gamma'}{B\Gamma} \Rightarrow B\Gamma' = 2\sigma\upsilon\nu\theta$

$\eta\mu\theta = \frac{\Gamma\Gamma'}{B\Gamma} \Rightarrow \Gamma\Gamma' = 2\eta\mu\theta$

Επίσης $\Gamma\Delta = AB + \Delta'A + B\Gamma' = 2 + 2B\Gamma' = 2 + 4\sigma\upsilon\nu\theta$

Οπότε $E = \frac{(2+4\sigma\upsilon\nu\theta+2)\cdot\cancel{2}\eta\mu\theta}{\cancel{2}} = (4+4\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu\theta = 4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta),\ \theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

Γ2. Η $E(\theta)$ συνεχής στο $(0,\frac{\pi}{2})$ αφού ορίζεται ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Είναι $E'(\theta) = 4\cdot\Big(\sigma\upsilon\nu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta) + \eta\mu\theta(-\eta\mu\theta)\Big) = 4(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu^2\theta)$

$= 4(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - 1) = 4\cdot(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1)$

Λύνουμε $E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

απορρίπτ. διότι $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$ για $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\overset{\sigma\upsilon\nu x \downarrow (0,\frac{\pi}{2})}{\underset{\text{και } 1-1}{\Longleftrightarrow}} \theta = \frac{\pi}{3}$.

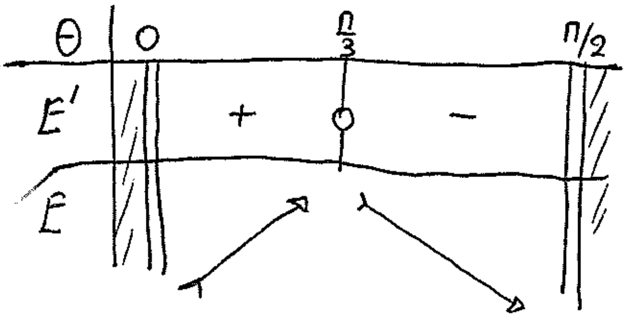
Για το πρόσημο

Η $E'$ συνεχής στα διαστήματα $(0,\frac{\pi}{3})$ και $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ και $E'\neq 0$ σε κάθε διάστημα.

Η $E'$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε διάστημα.

$E'(\frac{\pi}{4}) = 4\left(2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=2\sqrt{2}>0$ άρα $E'(\theta)>0$ για $\theta\in(0,\pi/3)$

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}E'(\theta)=4(2\cdot 0+0-1)=-4<0$ άρα $E'(\theta)<0$ για $\theta\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$




Η $E\uparrow(0,\frac{\pi}{3}]$ και $E\downarrow[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$

Το $E(\frac{\pi}{3})$ μέγιστο.

Η ζητούμενη γωνία: $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Γ3. $\phi(\theta)=4\text{συν}\theta+1$.

$\phi$ συνεχής στο $(0,\pi)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

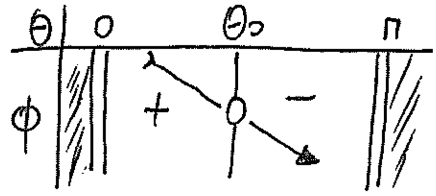
$\phi'(x)=-4\text{ημ}\theta<0$ για $x\in(0,\pi)$ αφού $\text{ημ}\theta>0$, $\theta\in(0,\pi)$.

Η $\phi\downarrow(0,\pi)$ άρα $\phi\big((0,\pi)\big)=\left(\lim\limits_{\theta\to\pi^-}\phi(\theta),\lim\limits_{\theta\to 0^+}\phi(\theta)\right)=(-3,5)$

Το $0\in\phi\big((0,\pi)\big)$ οπότε η $\phi(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\theta_0\in(0,\pi)$. Η $\phi$ 1-1 άρα η ρίζα μοναδική.

Για $\theta<\theta_0 \overset{\downarrow}{\Rightarrow} \phi(\theta)>\phi(\theta_0)\Rightarrow\phi(\theta)>0$

$\theta>\theta_0 \overset{\downarrow}{\Rightarrow} \phi(\theta)<\phi(\theta_0)\Rightarrow\phi(\theta)<0$



Γ4. $E'(\theta) = 4\cdot(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1)$

$$E''(\theta) = 4\cdot\left(4\sigma\upsilon\nu\theta(-\eta\mu\theta) - \eta\mu\theta\right) = -4\,\eta\mu\theta\left(4\sigma\upsilon\nu\theta + 1\right) = -4\cdot\eta\mu\theta\cdot\phi(\theta)$$

Επειδή $-4\eta\mu\theta < 0$ για $\theta \in (0,\pi)$ το πρόσημο της $E''$ καθορίζεται από το $\phi(\theta)$ και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

| $\theta$ | $0$ | | $\theta_0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\phi$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $-4\eta\mu\theta$ | | $-$ | | $-$ | |
| $E''$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $E$ | | | ΣΚ | | |

Η $E(\theta)$ κοίλη στο $(0, \theta_0]$ και
κυρτή στο $[\theta_0, \pi)$

Παρουσιάζει καμπή μόνο στο σημείο
$M(\theta_0, E(\theta_0))$

# ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί νδο η $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \ln x-\frac{1}{x}=0$ έχει μοναδ. ρίζα στο $(1,e)$

Θεωρούμε την $K(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, $x>0$

- $K$ συνεχής στο $[1,e]$ ως διαφορά συνεχών
- $K(1)=\ln 1-1=-1<0$
  $K(e)=\ln e-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}>0$ $\Big\}$ $K(1)\cdot K(e)<0$

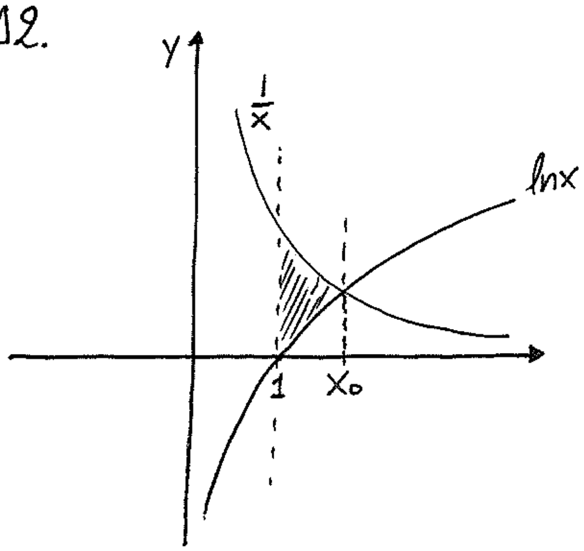
Από Θ. Bolzano η $K(x)=0$ έχει μια τουλ. ρίζα $x_0$ στο $(1,e)$.

$K'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$ άρα $K\uparrow$ και 1-1. Το $x_0$ μοναδικό.

Αν $\lambda$ η κλίση: $\lambda=f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$ όμως το $x_0$ ρίζα της εξίσωσης

$\ln x-\frac{1}{x}=0$ οπότε $\ln x_0=\frac{1}{x_0}$. Είναι $\lambda=\frac{1}{x_0}=\ln x_0=f(x_0)$.

Δ2.




$$E=\int_1^{x_0}|K(x)|\,dx=\int_1^{x_0}\left|\ln x-\frac{1}{x}\right|dx.$$

Ισχύει πως $K(x_0)=0$ και $K\uparrow$.

Αν $x<x_0 \Rightarrow K(x)<K(x_0)=0$

$x>x_0 \Rightarrow K(x)>K(x_0)=0$

Για $x\in[1,x_0]$ $K(x)\leq 0$ άρα

$$E=\int_1^{x_0}\left(-\ln x+\frac{1}{x}\right)dx=\Big[-(x\ln x-x)+\ln x\Big]_1^{x_0}$$

$$E=-(x_0\ln x_0-x_0)+\ln x_0-\Big(-(1\underbrace{\ln 1}_{0}-1)+\underbrace{\ln 1}_{0}\Big)$$

$$E=\ln x_0-x_0\ln x_0+x_0-1=\ln x_0(1-x_0)-(1-x_0)$$

$$E=(1-x_0)(\ln x_0-1)$$

Δ3. i) $\phi(x)=(f\circ h)(x)=\ln e^{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}$

$$\begin{cases} x\in D_h \\ h(x)\in D_f \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 1 \\ e^{\sqrt{x-1}}>0, \text{ ισχύει} \end{cases}$$

Άρα $\phi(x)=\sqrt{x-1},\ x\geq 1.$

Έστω τυχαίο σημείο $K(x,\sqrt{x-1}),\ x\geq 1$ της $C_\phi$. και $\Gamma(\frac{7}{2},0)$

$$(K\Gamma)=d(x)=\sqrt{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x-1}-0\right)^2}=\sqrt{x^2-7x+\frac{49}{4}+x-1}$$

$\Rightarrow d(x)=\sqrt{x^2-6x+\frac{45}{4}}$ . H d συνεχής στο $[1,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών

$$d'(x)=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+\frac{45}{4}}}=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+\frac{45}{4}}}$$

| $x$ | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $d'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $d$ | | $\searrow$ | ο.ε | $\nearrow$ | |

Για $x=3$ η απόσταση γίνεται ελάχιστη

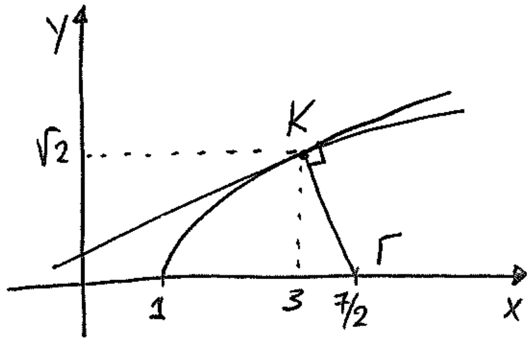
Οπότε το $K(3,\phi(3))\Rightarrow K(3,\sqrt{2})$ είναι

το πλησιέστερο σημείο στο $\Gamma(\frac{7}{2},0)$

ii) $$\lambda_{K\Gamma}=\frac{0-\sqrt{2}}{\frac{7}{2}-3}=\frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$$

Αν (ε) η εφαπτομένη : $\lambda_\varepsilon=\phi'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{3-1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

$$\lambda_{K\Gamma}\cdot\lambda_\varepsilon=-2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=-1\Rightarrow \varepsilon\perp K\Gamma.$$



Δ4. Λύνουμε $\phi(x) = \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{2}(x-1) \overset{\wedge 2}{\Longrightarrow} x-1 = \frac{1}{4}(x-1)^2$

$\Rightarrow 4x-4 = x^2-2x+1 \Rightarrow 0 = x^2-6x+5 \Rightarrow x=1$ ή $x=5$

(Επαληθεύω τις λύσεις στην αρχική εξίσωση. Δεκτές)

Κοινά σημεία $M(1, \sqrt{1-1}) \to M(1,0)$ και $\Delta(5, \sqrt{5-1}) \to \Delta(5,2)$

Θεωρώ την $Q(x) = \phi(x) - \frac{1}{2}(x-1) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{2}(x-1)$ με ρίζες το 1 και το 5.

Το πρόσημο της είναι απαραίτητο για τον εμβαδόν καθώς

$E = \int_1^5 |Q(x)|\,dx$. Η $Q$ συνεχής στο $(1,5)$ και $Q(x) \neq 0$ άρα διατηρεί πρόσημο στο $(1,5)$. $Q(2) = \sqrt{2-1} - \frac{1}{2}(2-1) = 1 - \frac{1}{2} > 0$

οπότε $Q(x) > 0$ στο $(1,5)$

Επομένως $E = \int_1^5 Q(x)\,dx = \int_1^5 \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}(x-1)\right) dx = \left[ \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \right]_1^5$

$\Rightarrow E = \left[ \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right]_1^5 = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{25}{4} + \frac{5}{2} - \left( \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)$

$E = \frac{2}{3}\sqrt{64} - \frac{25}{4} + \frac{10}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{16}{3} - \frac{14}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$ τ.μ