

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2023

Επιμέλεια : Γ.Α.Γιαννακόπουλος

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι ο $f'(x_0) = 0$.

(Μονάδες 6)

A2. Έστω συνάρτηση f και σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής της παράστασης. Πότε λέμε πως το A αποτελεί σημείο καμψής της C_f ;

(Μονάδες 5)

A3 Να σημειώσετε με **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις

α. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

β. Εάν μία συνάρτηση f είναι $1 - 1$, τότε δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f τα οποία να έχουν την ίδια τεταγμένη.

γ. Μία συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

δ. Αν η f παρουσιάζει μέγιστο τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μεγιστα.

ε. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$ έχει πάντα μοναδικό σημείο καμψής.

(Μονάδες 10)

A4. Επιλέξτε την σωστή απάντηση σε κάθε περίπτωση.

α. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλά ορισμένα;

$$\alpha. \int_0^{\pi} \eta \mu x \, dx \quad \beta. \int_0^1 \ln x \, dx \quad \gamma. \int_{-1}^3 \frac{1}{x} \, dx \quad \delta. \int_3^0 \sqrt{x} \, dx \quad \epsilon. \int_0^2 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

β. Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης

$$i. f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \quad ii. g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2}$$

ΘΕΜΑ Β

Αν $(g \circ f)(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 2x + 3$

B1. Να δείξετε πως $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

(Μονάδες 4)

B2. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

(Μονάδες 6)

B3. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής

i. να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 4)

ii. να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_3=1$ και να δείξετε ότι εφαπτεται και στην γραφική παράσταση της $h(x) = e^{x-2} - 4x + 4$

(Μονάδες 1+3)

B4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = e$

(Μονάδες 4+3)

ΘΕΜΑ Γ

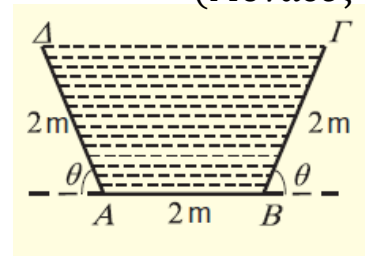
Ένα αρδρευτικό κανάλι του μεσσηνιακού κάμπου αρδρεύει το δημοτικό γήπεδο Αρφαρών, έδρα της τοπικής ομάδας ποδοσφαίρου!

Το κανάλι έχει κάθετη διατομή ισοσκελούς τραπεζίου $\Gamma ΒΑΔ$, με $AB = A\Gamma = ΒΔ = 2$

Γ1. Να δείξετε πως το εμβαδό της κάθετης διατομής δίνεται από τον τύπο

$$E(\theta) = 4 \cdot \eta\mu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

(Μονάδες 9)



Γ2. Να βρείτε την γωνία θ ώστε το κανάλι να μεταφέρει την μέγιστη ποσότητα νερού.

(Μονάδες 8)

Γ3. Να δείξετε πως η συνάρτηση $\varphi(\theta) = 4\sigma\upsilon\upsilon\theta + 1$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, \pi)$ και να βρείτε το πρόσημό της.

(Μονάδες 4)

Γ4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(\theta)$ έχει μοναδικό σημείο καμπής στο διάστημα $(0, \pi)$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.

Δ1. Να δείξετε πως οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, e)$ και πως $\lambda = f(x_0)$, όπου λ η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο κοινό τους σημείο.

(Μον.3+2)

Δ2. Να χαράξετε την γραφική τους παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων και να βρείτε (συναρτήσει του x_0) το εμβαδόν του χωρίου Ω ανάμεσα στην C_f , την C_g και τις ευθείες $x = 1$, $x = x_0$, όπου x_0 η ρίζα του Δ1.

(Μον.2+4)

Δίνεται επίσης η $h(x) = e^{\sqrt{x-1}}$, $x \geq 1$.

Δ3

- Να ορίσετε την $\phi(x) = (f \circ h)(x)$ και να βρείτε σημείο K της C_ϕ το οποίο να απέχει λιγότερο από το σημείο $\Gamma(\frac{7}{2}, 0)$.
- Να δείξετε πως η εφαπτομένη της C_ϕ στο K είναι κάθετη στην $K\Gamma$.

(Μονάδες 5+3)

Δ4. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της $\varphi(x)$ με την ευθεία

$(\zeta) y = \frac{1}{2}(x - 1)$ και έπειτα τον εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην C_f και την (ζ) .

(Μονάδες 3+3)

Εύχομαι Επιτυχία!