ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2022-2023

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Να αποδείξετε πως αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Α2.Εάν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε να αποδείξετε πως και η f+g .

είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Α3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Εάν

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε να αποδείξετε πως η f είναι σταθερή στο Δ.

Α4.Να αποδείξετε πως αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Α5. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β] και G μια παράγουσα της f στο [α, β].

Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha)$

(Μονάδες 5x4=20)

ΘΕΜΑ Β

Β1.Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Β2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Β3. Ποια σημεία ονομάζονται *κρίσιμα σημεία* μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Β4. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι κοίλη στο διάστημα Δ ;

ΑΝΟΔΟΣ-ΚΑΛΑΜΑΤΑ

Β5. Πότε λέμε πως μία συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό ελάχιστο;

Β6. Πότε η ευθεία y=λx+β λέμε ότι είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο +∞;.

Β7. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Β8.Τι ονομάζουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Β9. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Β10.'Εστω δύο συναρτήσεις f , g με πεδία ορισμού Α,Β αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f την g ;

(Μονάδες 10x3=30)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε εάν είναι Αληθής ή Ψευδής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α.
Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] τότε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι και ολικό μέγιστο της f.

Β.Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο σημείο x_0 θα είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Γ. Εάν η f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, ισχύει υποχρεωτικά f"(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

(Μονάδες 3x5=15)

Γ2.Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε **Σωστό** ή **Λάθος** αν θεωρείτε πως είναι σωστή ή λανθασμένη αντίστοιχα.

α. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$ τότε θα είναι πάντα ίσο με $f(2)\cdot g(2)$

β. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty$

γ. $Αν\ 0 < \alpha < 1\ τότε\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\log_\alpha x) = -\infty$

ΑΝΟΔΟΣ- ΚΑΛΑΜΑΤΑ

δ. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι ένα προς ένα αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

ε. $Αν \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ $τότε\ θα\ ισχύει\ υποχρεωτικά\ f(x) > 0$, $για\ κάθε\ x \in [\alpha, \beta]$.

στ. $Το \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ $παριστάνει\ πάντα\ το\ εμβαδόν\ του\ χωρίου\ ανάμεσα\ στην\ γραφική$

$παράσταση\ της\ συνάρτησης\ f, τον\ άξονα\ x\ και\ τις\ ευθείες\ x = \alpha\ , x = \beta$.

ζ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $ισχύει\ |ημx| \geq |x|$.

ι. Η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας μη σταθερής συνάρτησης f είναι επίσης διάστημα.

κ. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο **R** και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα x'x. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα x'x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

λ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε θα ισχύει υποχρεωτικά f ' (x)>0 στο εσωτερικό του Δ.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ

Α. Αν f(x)=lnx και g(x)=e^{-x} τότε

$i. (gof)(x) = \frac{1}{x}\ , x \neq 0$ $\qquad A/\ \Psi$

$ii. (fog)(x) = -x\ , x \in \mathbb{R}$ $\qquad A/\ \Psi$

(Μονάδες 2)

Β. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1 \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο :

ΑΝΟΔΟΣ-ΚΑΛΑΜΑΤΑ

i) η g είναι συνεχής στο 2 ii) η f είναι συνεχής στο 1

iii) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

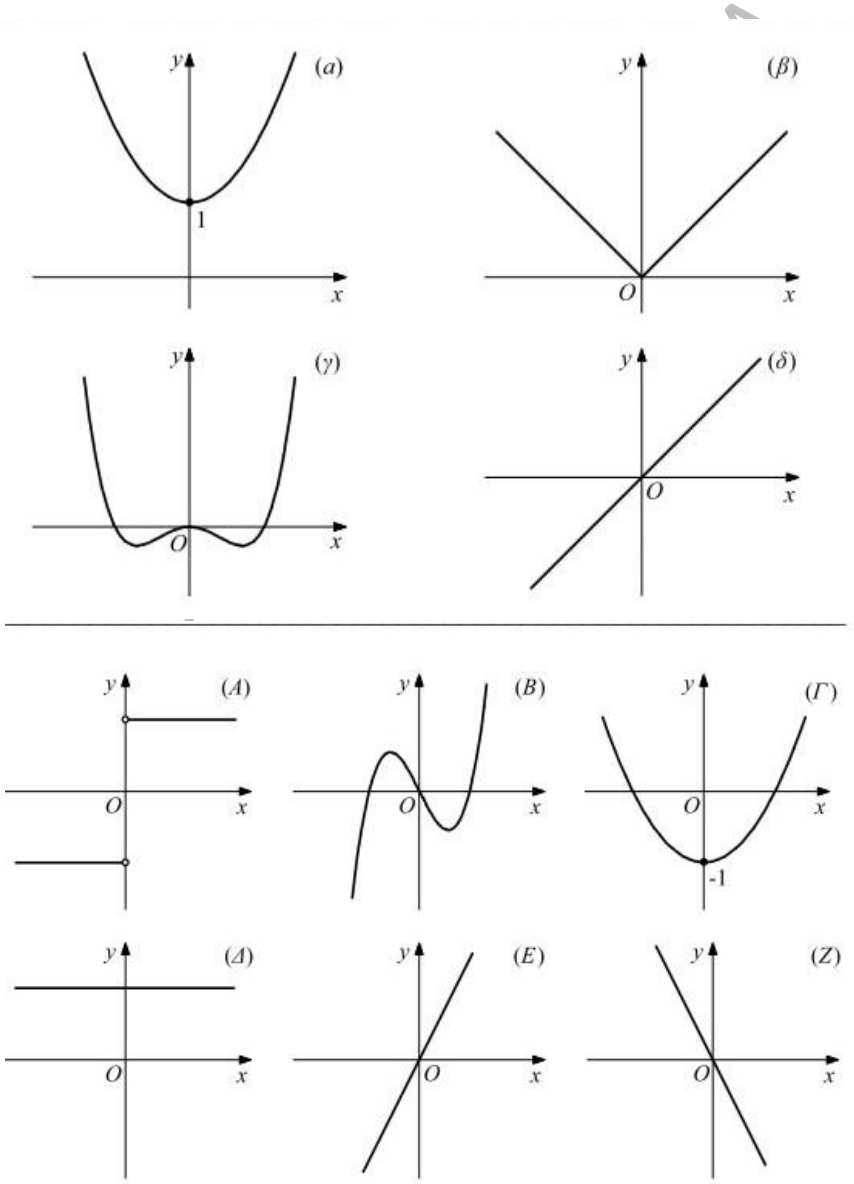
(Μονάδες 3)

Γ. Ποιο από τα παρακάτω όρια είναι καλά ορισμένο;

i. $\lim\limits_{x\to-2} \sqrt{x+1}$ ii. $\lim\limits_{x\to-1^-} \ln(x+1)$ iii. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{x}{x-4}$

(Μονάδες 2)

Δ. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.



(Μονάδες 8)

Ε. Έστω η f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β]. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις δεν ισχύει κατ' ανάγκη.

i. Η f είναι συνεχής στο [α, β]

ii. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο [α, β]

iii. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο [α, β]

iv. Η f παίρνει μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή στο [α, β]

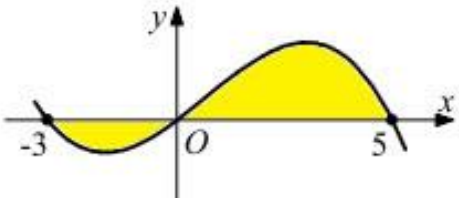
(Μονάδες 4)

ΣΤ. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι ίσο με:

$$\alpha)\int_{-3}^{5} f(x)\,dx \quad \beta)\int_{5}^{-3} f(x)dx \quad \gamma)\int_{-3}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{5} f(x)\,dx$$

$$\delta.\int_{0}^{5} f(x)dx - \int_{-3}^{0} f(x)dx$$



Ζ. Ποιο από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλά ορισμένο;

$$\alpha)\int_{0}^{2} lnx\,dx \quad \beta)\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2-4}dx \quad \gamma)\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx \quad \delta)\int_{-4}^{-2} \sqrt{-x}\,dx$$

(Μονάδες 2)

Η. Αν f '(x) = g'(x) για κάθε x ϵ [−1,1] και f(0) = g(0) + 2 , τότε για κάθε x ϵ [−1,1] ισχύει :

$$A.\, f(x) = g(x) - 2 \qquad B.\int_{-1}^{1}\big(f(x) - g(x)\big)dx = 4 \qquad \Gamma.\, f(x) \le g(x), x \in [-1,1]$$

$\Delta.$ *Οι* C_f, C_g *έχουν ένα κοινό σημείο στο* $[-1,1]$

(Μονάδες 4)

<u>ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>

ΑΝΟΔΟΣ - ΚΑΛΑΜΑΤΑ