

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ Α - Β

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2.5 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α1

I. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Να αποδείξετε πως αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$

(Μονάδες 5)

II. Εάν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε να αποδείξετε πως και η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(Μονάδες 5)

III. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$.

Να αποδείξετε πως για κάθε $x > 0$ ισχύει : $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(Μονάδες 5)

IV. Να αποδείξετε πως αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή σε όλο το Δ .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Α2

I. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

II. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι κοίλη στο διάστημα Δ ;

III. Πότε λέμε πως μία συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό ελάχιστο;

IV. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle .

V. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

VI. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 18)

ΘΕΜΑ Α3

Να σημειώσετε με **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις.

- i. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , τότε ισχύει υποχρεωτικά $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
- ii. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$ τότε θα ισχύει πάντα $f'(\xi) = 0$.
- iii. Ένα τοπικό μέγιστο δεν είναι πάντα μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο.
- iv. Κάθε ρητή συνάρτηση με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο κατά δύο τουλάχιστον μονάδες από τον βαθμό του παρονομαστή δεν έχει ασύμπτωτες.
- v. Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε η f'' θα είναι θετική στο εσωτερικό του Δ .
- vi. Η γραφική παράσταση μίας κυρτής συνάρτησης βρίσκεται πάντα πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Α4

Αν $f'(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε :

α. Το 2 είναι θέση τοπικού ελαχίστου της f .

A/Ψ

β. Το 1 είναι θέση τοπικού μεγίστου της f .

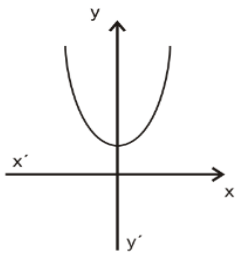
A/Ψ

Επιλέξτε αν κάθε πρόταση είναι αληθής ή ψευδής (Μονάδες 2) και αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

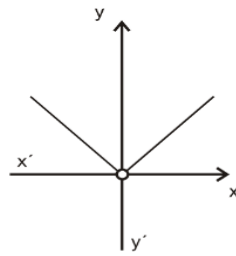
ΘΕΜΑ Α5

A2. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T .

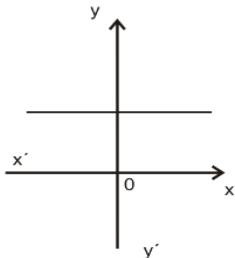
Ποιά από τις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της f και ποια της g



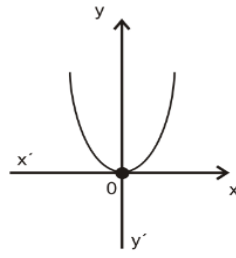
(f)



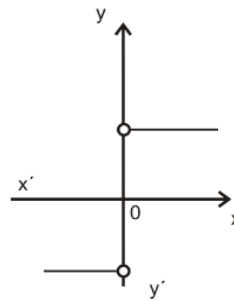
(g)



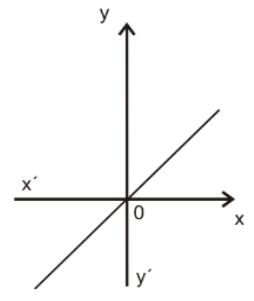
(F)



(G)



(H)



(T)

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

β. Να βρεθεί η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.

(Μονάδες 4)

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης (αν υπάρχουν) και τα σημεία τομής της με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 2)

δ. Με βάση τα ερωτήματα α, β, γ να σχεδιάσετε την C_f .

(Μονάδες 4)

ε. Με βάση την C_f , να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων

i. $f(x) = 3$ ii. $f(x) = \sqrt{17}$ iii. $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 1+1+4=6)

ΘΕΜΑ Β2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

β. Να βρεθεί η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.

(Μονάδες 5)

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης (αν υπάρχουν).

(Μονάδες 5)

δ. Με βάση τα ερωτήματα α, β, γ να σχεδιάσετε την C_f .

(Μονάδες 5)

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στην κόλλα σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00.

Επιμέλεια Θεμάτων : Γ.Α.Γιαννακόπουλος

Εύχομαι επιτυχία!