ΘΕΜΑ Α

A1, A2, A3 } ΘΕΩΡΙΑ

A4. i. Σωστό

ii Λάθος

iii Λάθος

iv Λάθος

A5 Ισχύει $f'(x_0) = g'(x_0) \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = 4x_0$

$\Leftrightarrow x_0^2 = \frac{1}{4} \underset{x_0>0}{\Leftrightarrow} x_0 = \frac{1}{2}$.

Άρα σωστή απάντηση (γ)

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = x^3 + 3x - 4 \quad A = \mathbb{R}$

B1. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολ/κη.

Ισχύει $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ άρα $f \uparrow \mathbb{R}$ και 1-1.

Οπότε αντιστρέφεται.

B2. Είναι $\frac{k}{\lambda^2+3} < \frac{\lambda}{k^2+3} \Leftrightarrow k(k^2+3) < \lambda(\lambda^2+3)$

$\overset{-4}{\Leftrightarrow} k^3 + 3k - 4 < \lambda^3 + 3\lambda - 4$

$\Leftrightarrow f(k) < f(\lambda) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} k < \lambda$, ισχύει

B3. Έστω x_0 το σημείο επαφής.

$\lambda = f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Οπότε (ε) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - (-4) = 3x$

$\Rightarrow y = 3x - 4$.

B4. $f(A) \overset{\uparrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Είναι $x^3 = 2027 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x = 2027$

$\underset{-4}{\Leftrightarrow} x^3 + 3x - 4 = 2023$

$\Leftrightarrow f(x) = 2023$

Το $2023 \in f(A)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 2023$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα, δηλ υπάρχει $x_0 \in A$ με $f(x_0) = 2027$.

Η f ↑ και 1-1 άρα το x_0 μοναδικό.

Ισχύει $x_0 > 2 \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) > f(2) \Leftrightarrow 2023 > 8 + 6 - 4$

$\Leftrightarrow 2023 > 10$, ισχύει

ΘΕΜΑ Γ.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \leq 1 \\ 3x^2 + b, & x > 1. \end{cases}$$

Γ1. Για να ικανοποιεί το ΘΜΤ πρέπει να είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παρ/μη στο $(0,2)$ οπότε συνεχής και παραγ/μη στο $x = 1$.

▷ Συνέχεια στο 1.

$f(1) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) \Rightarrow 1 + a = 3 + b \Rightarrow a - b = 2$

$\Rightarrow b = a - 2$

Οπότε η $f(x) = \begin{cases} x^2+ax, & x \leq 1 \\ 3x^2+a-2, & x>1 \end{cases}$

▸ Παραγωγίσιμη στο 1.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+ax-(1+a)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2+a-2-(1+a)}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{\Leftrightarrow}}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+a}{1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{6x}{1} \Leftrightarrow 2+a=6 \Leftrightarrow a=4$$

Οποτε $b = a-2 = 2$

Τελικά $f(x) = \begin{cases} x^2+4x, & x \leq 1 \\ 3x^2+2, & x>1 \end{cases}$

Γ3. Η f παρ/μη στο $[0,2]$ με $f'(x) = \begin{cases} 2x+4, & x \leq 1 \\ 6x, & x>1 \end{cases}$

άρα και συνεχής.

Επομένως

- f συνεχής στο $[0,2]$
- f παρ/μη στο $(0,2)$

από ΘΜΤ υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ με $f'(x_0) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{14}{2} = 7$

Αν (ε) η εφαπτομένη στο $K(x_0, f(x_0))$ είναι $\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = 7$

άρα $\lambda_\varepsilon = \lambda_g \Rightarrow \varepsilon \parallel g$

▷ Για $x \in (0,1]$ $f'(x) = 7 \Leftrightarrow 2x+4=7 \Leftrightarrow x = 3/2$ απορρίπτεται

▷ Για $x \in (1,9)$: $f'(x) = 7 \Leftrightarrow 6x = 7 \Leftrightarrow x = 7/6$ δεκτή

Άρα $x_0 = 7/6$

Γ3. Είναι $f'(x) = \begin{cases} 2x+4, & x \leq 1 \\ 6x, & x > 1 \end{cases}$

Για $x \leq 1$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$		-2		1
f'		$-$	0	$+$	

Για $x > 1$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ απορ.

x		0		1	
f'	~~$-$~~	~~0~~	~~$+$~~		$+$

Πίνακας Μονοτονίας

x	$-\infty$		-2		
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Η $f \downarrow (-\infty, -2]$

$f \uparrow [-2, +\infty)$

Το $f(-2) = -4$ ολικό ελάχιστο της f

"Κοντά" στο 1 η $f \uparrow$ και ισχύει $\ln x \leq x-1 \Leftrightarrow \ln x + 1 \leq x$ για κάθε $x > 0$.

Άρα $\ln x + 1 \leq x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(\ln x + 1) \leq f(x) \Leftrightarrow f(\ln x+1) - f(x) \leq 0$

και ισχύει $\lim_{x \to 1} [f(\ln x+1) - f(x)] = 0$ άρα το όριο ισούται με $-\infty$.

Γ4. Ισχύει $y(t) = f(x(t)) \Rightarrow y(t) = 3x^2(t) + 2$ για $x(t) > 1$.

Είναι $y'(t) = 6x(t) \cdot x'(t)$ και για $t = t_0$ $y'(t_0) = 12x'(t_0)$

Οπότε $y'(t_0) = 6x(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 12x'(t_0) = 6x(t_0) \cdot x'(t_0)$

$\overset{x'(t_0)>0}{\Longleftrightarrow} 12 = 6x(t_0) \Leftrightarrow x(t_0) = 2$ άρα $y(t_0) = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14$

Το ζητούμενο σημείο είναι $M(2, 14)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. (1) $\Leftrightarrow$ $x(g(x)-f(x))+1-e^x+x \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε $h(x)=x(g(x)-f(x))+1-e^x+x$, $x \in \mathbb{R}$
και ισχύει $h(0)=0$

Άρα (1) $\Leftrightarrow h(x) \le 0 \Leftrightarrow h(x) \le h(0)$

Η h παρουσιάζει μέγιστο για $x=0$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

με $h'(x)=g(x)-f(x)+x\cdot(g'(x)-f'(x))-e^x+1$

Από Θ. Fermat: $h'(0)=0 \Leftrightarrow g(0)-f(0)+0\cdot(g'(0)-f'(0))-e^0+1=0$

$\Leftrightarrow g(0)=f(0)$.

(2) $\Leftrightarrow e^{g(0)}=g(0)+1 \underset{g(0)=y}{\Leftrightarrow} e^y=y+1$.

Ισχύει $e^x \ge x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το "=" μόνο για $x=0$.

Οπότε $e^y=y+1 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow g(0)=0=f(0)$

Δ2 Αρκεί νδο $2f(x)=\ln(x^2+1) \Leftrightarrow e^{2f(x)}=x^2+1$

$\Leftrightarrow e^{2f(x)}-x^2-1=0$

Θεωρούμε $\phi(x)=e^{2f(x)}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$

Η ϕ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών.

$$\phi'(x)=e^{2f(x)}2f'(x)-2x \overset{(3)}{=} e^{2f(x)}2xe^{-2f(x)}-2x = e^{0}2x-2x=0$$

Άρα $\phi(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^{2f(x)}-x^2-1=0 \overset{x=0}{\Rightarrow} e^{2f(0)}-0-1=c$$

$\Rightarrow 0=c$. Οπότε $e^{2f(x)}-x^2-1=0$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{2},\ x\in\mathbb{R}$$

Δ3. Ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}(x^2+1)}=\frac{x}{x^2+1}$

Είναι $|f'(x)|\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{x}{x^2+1}\right|\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|x|}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$

$$\overset{\cdot 2(x^2+1)}{\Leftrightarrow} 2\cdot|x|\le x^2+1 \Leftrightarrow 0\le|x|^2-2|x|+1$$

$\Leftrightarrow 0\le(|x|-1)^2$, ισχύει.

Δ4. Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ και $x^2+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

$f \downarrow (-\infty,0]$

$\uparrow [0,+\infty)$

Το $f(0)=0$ ολικό ελάχιστο

δηλ. $f(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (4)

$\frac{2f'(a)-1}{x-3} - \frac{f(a)}{x-4} = 0 \iff$

$(x-4)\cdot(2f'(a)-1) - (x-3)\cdot f(a) = 0 \quad (5)$

Θεωρώ $G(x) = (x-4)(2f'(a)-1) - (x-3)\cdot f(a)$

άρα η $(5) \iff G(x)=0$

$G(3) = -(2f'(a)-1) \geq 0$ διότι $|f'(a)| \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \leq f'(a) \leq \frac{1}{2} \iff 2f'(a)-1 \leq 0$

$G(4) = -f(a) \leq 0$ αφού λόγω (4) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Είναι $G(3)\cdot G(4) \leq 0$.

- Αν $G(3)\cdot G(4) = 0 \iff G(3)=0$ ή $G(4)=0$.
- Αν $G(3)\cdot G(4) < 0$, η $G(x)$ συνεχής στο $[3,4]$ ως πολ/κη άρα από Θ.Β. η $G(x)=0$ έχει μια τουλ. ρίζα στο $(3,4)$

Τελικά η $G(x)=0$ έχει μ.τ.ρ στο $[3,4]$

Η G είναι πολυώνυμο α' βαθμού οπότε η ρίζα είναι μοναδική.