ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Νο2

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

Τρίτη 10/5 2022

Ώρα έναρξης 9:00

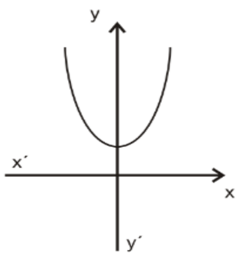
ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

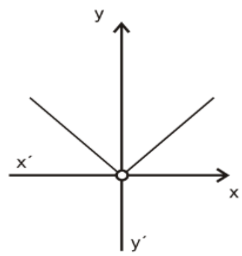
Αν $f'(x) > 0$ *στο* (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο $(x_0\,, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

(Μονάδες 6)

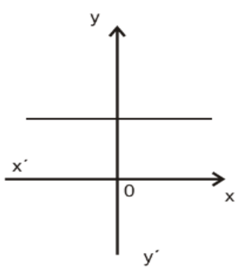
Α2. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g , F, G, H , T.
Ποιά από τις F , G H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της f και ποια της g;



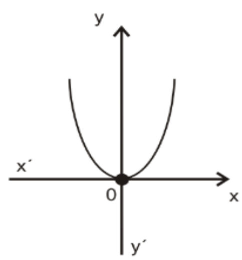
(f)



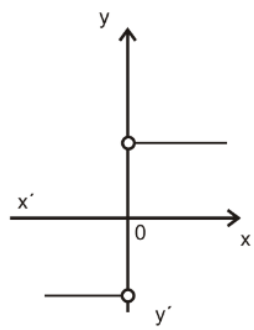
(g)



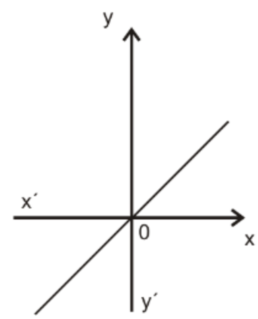
(F)



(G)



(H)



(T)

(Μονάδες 6)

Α3.Σημειώστε με **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις.

i) Αν η f είναι $1 - 1$ συνάρτηση τότε ορίζεται η αντίστροφή της και ισχύει $f(f^{-1}(y)) = y$, για κάθε $y \in f(A)$, όπου Α το πεδίο ορισμού της f.

ii) Κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] , παίρνει μία ελάχιστη (m) και μία μέγιστη (M) τιμή στο διάστημα αυτό.

iii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1], παραγωγίσιμη στο (0, 1) και $f\,'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

iv) Αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$ τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$.

v) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$ έχει πάντα μοναδικό σημείο καμπής.

(Μονάδες 10)

Α4. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέμε ότι είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$

Β1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και gof

(Μονάδες 6)

Β2. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την $g^{-1}(x)$

(Μονάδες 3+3)

Β3.Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των g και g^{-1}.

(Μονάδες 6)

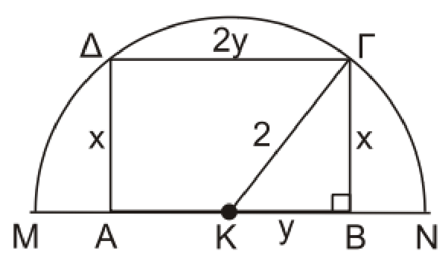
Έστω πως $\varphi(x) = (gof)(x) = \sqrt{x^2-1}\,, x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Β4.Να βρείτε τις ασύμπτωτες τις φ.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Κ και διάμετρο $MN = 4$ cm. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις x cm και 2y cm είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x , είναι $E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}, x \in (0,2)$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(E(x) - 2\sqrt{3}\right)e^x,\ x \in (0,2)$ έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα (0, 2) .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{lnx}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \dfrac{lnx}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

Δ1 . Να δείξετε πως η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$και να βρείτε , αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφική της παράστασης.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να δείξετε ότι το x=1 είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

(Μονάδες 6)

Δ3. i. Να δείξετε πως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0, +\infty)$.

ii. Έστω Ε το εμβαδόν ανάμεσα στην C_f , τον $x'x$, τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_0$.

Να αποδείξετε ότι $E = \frac{-{x_0}^2 - 2x_0 + 2}{2}$

(Μονάδες 7)

Δ4. Αν F μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$να δείξετε ότι

$$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2) \text{ για κάθε } x > 1$$

(μονάδες 6)