

ΘΕΜΑ Α: Α2:  $f \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $g \rightarrow \mathbb{H}$  Α3 i) Σωστό ii) Λάθος iii) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

iv) Λάθος ✓ Σωστό

$$f(x) = x^2 + 1 \quad A = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-2} \quad B = [2, +\infty)$$

B1.  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x-2}^2 + 1 = x-2+1 = x-1$   $D_{f \circ g} = [2, +\infty)$

$$\begin{cases} x \in B \\ g(x) \in A \end{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ g(x) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2+1-2} = \sqrt{x^2-1} \quad D_{g \circ f} = [1, +\infty)$$

$$\begin{cases} x \in A \\ f(x) \in B \end{cases} \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2+1 \geq 2 \Rightarrow x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases}$$

B2. Η  $g$  αυξανής στο  $[2, +\infty)$  και για κάθε  $x \in [2, +\infty)$  ισχύει

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0 \text{ για κάθε } x > 2. \text{ άρα } g \uparrow [2, +\infty) \text{ και "1-1" οντίτη}$$

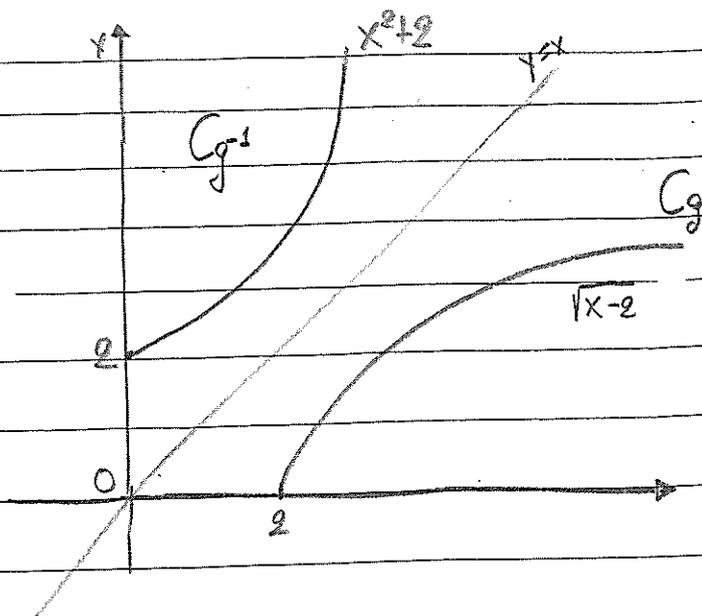
ΑΝΤΙΓΡΕΦΕΤΑΙ

$$y = g(x) \Rightarrow y = \sqrt{x-2} \xrightarrow{\wedge 2} y^2 = x-2 \Rightarrow x = y^2+2$$

$$x = g^{-1}(y) \Rightarrow g^{-1}(y) = y^2+2 \text{ άρα } g^{-1}(x) = x^2+2, \quad x \geq 0$$

$$D_{g^{-1}} = g(B) \stackrel{g \uparrow}{=} [g(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)] = [0, +\infty)$$

B3



B4.  $\varphi(x) = \sqrt{x^2-1}$      $D_\varphi = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Η  $\varphi$  γίνεται στο  $D_\varphi$ , δεν έχει κατακρίση αξιωματικές

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$\stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = 1 - 0 = 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{\sqrt{x^2-1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{|x| \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x \left( \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + 1} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 = 0$$

$y = 1 \cdot x$  αξιωματικές στο  $+\infty$

$$\triangleright \text{Ανάλυση υπολοίπων: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = -1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1x) = \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 0 = b$$

И  $y = -x$  обильно в  $-\infty$

[Blank lined page]

2000  
1999  
1998  
1997  
1996  
1995  
1994  
1993  
1992  
1991  
1990  
1989  
1988  
1987  
1986  
1985  
1984  
1983  
1982  
1981  
1980  
1979  
1978  
1977  
1976  
1975  
1974  
1973  
1972  
1971  
1970  
1969  
1968  
1967  
1966  
1965  
1964  
1963  
1962  
1961  
1960  
1959  
1958  
1957  
1956  
1955  
1954  
1953  
1952  
1951  
1950  
1949  
1948  
1947  
1946  
1945  
1944  
1943  
1942  
1941  
1940  
1939  
1938  
1937  
1936  
1935  
1934  
1933  
1932  
1931  
1930  
1929  
1928  
1927  
1926  
1925  
1924  
1923  
1922  
1921  
1920  
1919  
1918  
1917  
1916  
1915  
1914  
1913  
1912  
1911  
1910  
1909  
1908  
1907  
1906  
1905  
1904  
1903  
1902  
1901  
1900

ΘΕΜΑ Γ

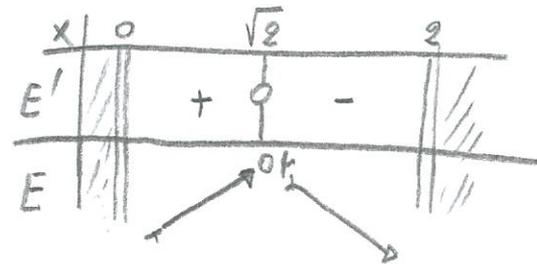
Γ1. Π.Θ στο  $\triangle K\beta\Gamma$ :  $x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$  ①

$(AB\Gamma\Delta) = E = AB \cdot B\Gamma = 2y \cdot x \stackrel{\text{①}}{=} 2\sqrt{4 - x^2} \cdot x = 2\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{4 - x^2} = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$

$E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$ ,  $x \in (0, 2)$

Γ2.  $E(x)$  συνεχής στο  $(0, 2)$  αφού ορίζεται ως πρῶτος, συνεχών συναρτησέων

$E'(x) = 2 \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = \frac{4x(2 - x^2)}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$



$E'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  ή  $2 - x^2 = 0 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} x = \sqrt{2}$   
απορ.

Η  $E(x)$  παρουσιάζει μέγιστο γὰρ  $x = \sqrt{2}$  τὸ  $E(\sqrt{2}) = 2\sqrt{4 \cdot 2 - 4} = 2\sqrt{4} = 4$  τμ

καὶ οἱ διαστάσεις τοῦ ορθογωνίου  $x = \sqrt{2}$  καὶ  $2y = 2 \cdot \sqrt{4 - \sqrt{2}^2} = 2\sqrt{2}$

Γ3. Εἶναι  $E(x) = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{4x^2 - x^4} = 2\sqrt{3} \stackrel{\wedge 2}{\Rightarrow} 4x^2 - x^4 = 3$

$\Rightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \stackrel{x^2 = \alpha}{\Rightarrow} \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$  ἢ  $\alpha = 3$

$\Rightarrow x^2 = 1$  ἢ  $x^2 = 3 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} x = 1$  ἢ  $x = \sqrt{3}$ .

Γ4. Η  $f(x)$  συνεχής στο  $[1, \sqrt{3}]$

$f$  παρακμ στο  $(1, \sqrt{3})$  με  $f'(x) = E'(x) \cdot e^x + (E(x) - 2\sqrt{3})e^x$

$f(1) = (E(1) - 2\sqrt{3})e^1 \stackrel{f(1)}{=} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{3})e = 0$

$f(\sqrt{3}) = (E(\sqrt{3}) - 2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}} \stackrel{f(\sqrt{3})}{=} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}} = 0$  }  $f(1) = f(\sqrt{3})$

Απὸ θ. Rolle υπάρχει ἐνὰ τουλάχιστον  $x_0 \in (1, \sqrt{3}) \subseteq (0, 2)$  ὥστε  $f'(x_0) = 0$

Ὁπλ  $n$   $f$  ἔχει 1 τουλάχιστον κριτικό σημείο στο  $(0, 2)$



ΘΕΜΛ Δ

$$\Delta 1. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

Στα  $(0,1)$  και  $(1,+\infty)$  η  $f$  συνεχής ως ποσότητες συνεχών

$$\left. \begin{aligned} \text{Στο } x=1: f(1)=1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{\ln x}{x} + 1 \right) = 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$$

Η  $f$  συνεχής και στο  $x=1$  άρα  $f$  συνεχής στο  $(0,+\infty)$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln x \cdot \frac{1}{x} + 1 \right) = -\infty \cdot (+\infty) + 1 = -\infty$$

Η ευθεία  $x=0$  (άξονας  $y'y'$ ) ασύμπτωτη της  $C_f$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x-1} = 0 \cdot 0 = 0 = 1$$

$$\text{αφοί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0 = b \quad \text{Η } y=0 \text{ (} x'x \text{) ασύμπτωτη στο } +\infty$$

$$\Delta 2 \text{ Για } x \in (0,1) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \text{ απροσπύγεται}$$

$$x \in (1,+\infty) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} - \ln x = 0$$

$$\Rightarrow -\ln x = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \ln \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ απροσπύγεται}$$

αφού  $\ln x \leq x-1$ , για κάθε  $x > 0$ , Το "=" λοιπόν για  $x=1$ .

Αρα  $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$  το "=" λοιπόν για  $\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x=1$

Ελέγχω αν η  $f$  πορ/τη στο  $x=1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\ln x}{x} + 1 - 1}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \ln x}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\ln x}{x} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\ln x - x + 1}{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1. Το 1 κριτήριο βήτης.

Δ3. Για  $x=1$   $f(1) = 1 \neq 0$

Για  $x > 1$ :  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  και  $\ln x > 0$  και  $x-1 > 0$  άρα  $f(x) > 0$ .

Για  $x \in (0, 1)$ :  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 1$  με  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$  αφού  $x^2 > 0$  και  $\ln x < 0 \Rightarrow -\ln x > 0 \Rightarrow 1 - \ln x > 1$ . Η  $f \uparrow (0, 1)$

$$f((0, 1)) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-\infty, 1)$$

Το  $0 \in f((0, 1))$  άρα υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$  με  $f(x_0) = 0$

Η  $f \uparrow (0, 1)$  άρα το  $x_0$  μοναδικό

ii) Το γινόμενο εγώ ελάττωσιν είναι  $E = \int_{x_0}^1 |f(x)| dx = \int_{x_0}^1 f(x) dx$

$x \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & x_0 & 1 \\ \hline \end{array}$   $f \begin{array}{|c|c|c|} \hline || & - & + \\ \hline \end{array}$   $\Rightarrow E = \int_{x_0}^1 (\ln x \cdot \frac{1}{x} + 1) dx = \int_{x_0}^1 [\ln x (\ln x)' + 1] dx$

$\Rightarrow E = [\frac{1}{2} \ln^2 x + x]_{x_0}^1 = \frac{1}{2} \ln^2 1 + 1 - (\frac{1}{2} \ln^2 x_0 + x_0)$

$\Rightarrow E = 1 - \frac{1}{2} (\ln x_0)^2 - x_0$  Ομως  $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} E = 1 - \frac{1}{2} (-x_0)^2 - x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0 \quad (2)$

$\Rightarrow E = 1 - \frac{1}{2} x_0^2 - x_0 = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}$

Δ4. Για  $x > 1$  ισχύει  $F'(x) = f(x)$  και

$F''(x) = f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} < 0$  για  $x > 1$  αφού

$\ln x \leq x-1 \Rightarrow \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$ , το "=" λόγω για  $x=1$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x} + \ln 1 - \ln x \leq 0$  Αφού  $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x} - \ln x < 0$

Β' τρόπος

$F''(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1 - x \ln x}{x(x-1)^2} = \frac{\varphi(x)}{x(x-1)^2}$

$\varphi(x) = x-1 - x \ln x$  και  $\varphi(1) = 0$ . Είναι  $\varphi'(x) = 1 - 1 - \ln x = -\ln x < 0$  για  $x > 1$

οπότε  $\varphi \downarrow$ . Άρα  $x > 1 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(1) \Rightarrow \varphi(x) < 0 \Rightarrow F''(x) < 0, F' \downarrow$

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50

[Blank lined page]

$$(x+1)F(x) > x \cdot F(1) + F(x^2) \Rightarrow x \cdot F(x) + F(x) > x \cdot F(1) + F(x^2)$$

$$\Rightarrow x F(x) - x \cdot F(1) > F(x^2) - F(x)$$

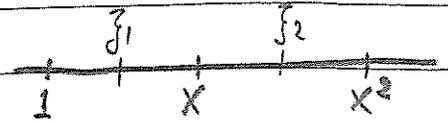
$$\Rightarrow x \cdot (F(x) - F(1)) > F(x^2) - F(x)$$

$$: x > 0$$

$$\Rightarrow F(x) - F(1) > \frac{F(x^2) - F(x)}{x}$$

$$:(x-1) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{F(x) - F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x-1)} \quad (3)$$



$\forall F$  συνεχής στα  $[1, x]$  και  $[x, x^2]$  και  
παράγωγική στα  $(1, x)$  και  $(x, x^2)$

Απὸ ΘΜΤ υπάρχουν  $\xi_1 \in (1, x)$  και  $\xi_2 \in (x, x^2)$  με  $F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(1)}{x-1}$

$$\text{και } F'(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x}$$

$F' \downarrow$

Αρα (3)  $\Leftrightarrow F'(\xi_1) > F'(\xi_2) \Leftrightarrow \xi_1 < \xi_2$  ισχύει

1951  
1952  
1953  
1954  
1955  
1956  
1957  
1958  
1959  
1960  
1961  
1962  
1963  
1964  
1965  
1966  
1967  
1968  
1969  
1970  
1971  
1972  
1973  
1974  
1975  
1976  
1977  
1978  
1979  
1980  
1981  
1982  
1983  
1984  
1985  
1986  
1987  
1988  
1989  
1990  
1991  
1992  
1993  
1994  
1995  
1996  
1997  
1998  
1999  
2000  
2001  
2002  
2003  
2004  
2005  
2006  
2007  
2008  
2009  
2010  
2011  
2012  
2013  
2014  
2015  
2016  
2017  
2018  
2019  
2020  
2021  
2022  
2023  
2024  
2025

Blank lined page with horizontal ruling lines.