ΘΕΜΑ Α: Α2: $f \to T$, $g \to H$ Α3 i) Σωστό ii) Λάθος iii) Σωστό

iv) Λάθος v) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = x^2 + 1 \quad A = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x-2} \quad B = [2, +\infty)$

Β1. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x-2}^{\,2} + 1 = x - 2 + 1 = x - 1 \qquad D_{f \circ g} = [2, +\infty)$

$\begin{cases} x \in B \\ g(x) \in A \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ g(x) \in \mathbb{R} \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1} \qquad D_{g \circ f} = [1, +\infty)$

$\begin{cases} x \in A \\ f(x) \in B \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 + 1 \geq 2 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases}$

Β2. Η g συνεχής στο $[2, +\infty)$ και για κάθε $x \in (2, +\infty)$ ισχύει

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$ για κάθε $x > 2$. άρα $g \nearrow [2, +\infty)$ και "1-1" οπότε

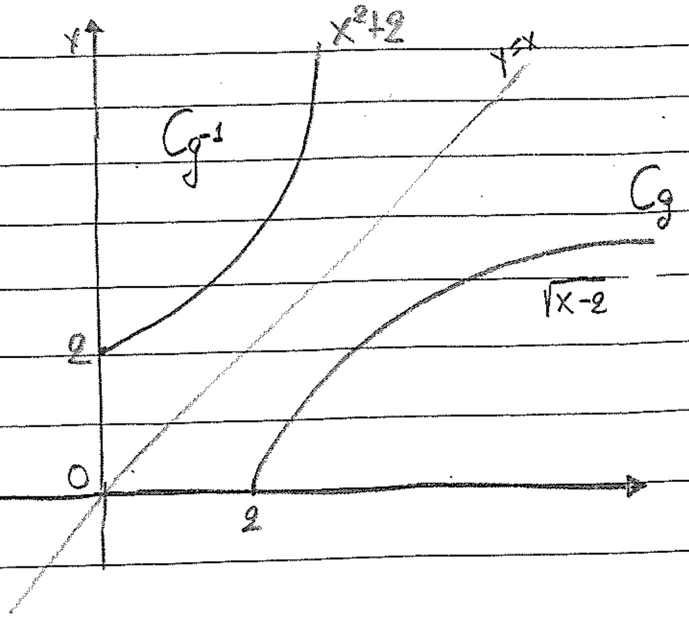
αντιστρέφεται

$y = g(x) \Rightarrow y = \sqrt{x-2} \xrightarrow{\wedge 2} y^2 = x - 2 \Rightarrow x = y^2 + 2$

$\xRightarrow{x = g^{-1}(y)} g^{-1}(y) = y^2 + 2$ άρα $g^{-1}(x) = x^2 + 2, \quad x \geq 0$

$D_{g^{-1}} = g(B) \overset{g \nearrow}{=\!=} [g(2), \lim_{x \to +\infty} g(x)) = [0, +\infty)$

B3.



B4. $\varphi(x)=\sqrt{x^2-1}$ $\quad D_\varphi=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Η φ συνεχής στο D_φ, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

▷ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}$

$\overset{x>0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}=1-0=1=\lambda$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\varphi(x)-1x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{2}=0=b$

$y=1\cdot x$ ασύμπτωτη στο $+\infty$

▷ Ανάλογα υπολογίζουμε. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\dots=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=-1=\lambda$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x) = \dots = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 0 = b$$

Η $y=-x$ ασύμπτωτη στο $-\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Π.Θ στο $\overset{\triangle}{ΚΒΓ}$: $x^2+y^2=2^2 \Rightarrow y^2=4-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{4-x^2}$ ①

$$(ΑΒΓΔ)=E=ΑΒ\cdot ΒΓ=2y\cdot x \overset{①}{=} 2\sqrt{4-x^2}\cdot x = 2\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{4x^2-x^4}$$

$$E(x)=2\sqrt{4x^2-x^4},\quad x\in(0,2)$$

Γ2. $E(x)$ συνεχής στο $(0,2)$ αφού ορίζεται ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$E'(x)=\cancel{2}\,\frac{8x-4x^3}{\cancel{2}\sqrt{4x^2-x^4}}=\frac{4x(2-x^2)}{\sqrt{4x^2-x^4}}$$

$$E'(x)=0 \Rightarrow \underset{\text{απορ.}}{x=0} \text{ ή } 2-x^2=0 \overset{x>0}{\Rightarrow} x=\sqrt{2}$$

x	0		$\sqrt{2}$		2
E'		$+$	0	$-$	
E		$\nearrow$	ολ	$\searrow$	

Η $E(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=\sqrt{2}$ το $E(\sqrt{2})=2\sqrt{4\cdot 2-4}=2\sqrt{4}=4$ τμ

και οι διαστάσεις του ορθογωνίου $x=\sqrt{2}$ και
$2y=2\cdot\sqrt{4-\sqrt{2}^2}=2\sqrt{2}$

Γ3. Είναι $E(x)=2\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{4x^2-x^4}=2\sqrt{3} \overset{\wedge 2}{\Rightarrow} 4x^2-x^4=3$

$$\Rightarrow x^4-4x^2+3=0 \overset{x^2=\alpha}{\Longrightarrow} \alpha^2-4\alpha+3=0 \Rightarrow \alpha=1 \text{ ή } \alpha=3$$

$$\Rightarrow x^2=1 \text{ ή } x^2=3 \overset{x>0}{\Longrightarrow} x=1 \text{ ή } x=\sqrt{3}.$$

Γ4. Η $f(x)$ συνεχής στο $[1,\sqrt{3}]$

f παρ/μη στο $(1,\sqrt{3})$ με $f'(x)=E'(x)\cdot e^x+(E(x)-2\sqrt{3})e^x$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=(E(1)-2\sqrt{3})e^1 \overset{Γ3}{=} (2\sqrt{3}-2\sqrt{3})e=0 \\ f(\sqrt{3})=[E(\sqrt{3})-2\sqrt{3}]e^{\sqrt{3}} \overset{Γ3}{=} (2\sqrt{3}-2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}}=0 \end{array}\right\} f(1)=f(\sqrt{3})$$

Από Θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,\sqrt{3})\subseteq(0,2)$ ώστε $f'(x_0)=0$

δηλ. η f έχει 1 τουλ. κρίσιμο σημείο στο $(0,2)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=\begin{cases} \frac{\ln x}{x}+1, & 0<x<1 \\ 1, & x=1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x>1 \end{cases}$

Στα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ η f συνεχής ως πράξεις συνεχών

Στο $x=1$: $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{\ln x}{x}+x\right)=0+1=1$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$ $\Bigg\}$ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=1=f(1)$

Η f συνεχής και στο $x=1$ άρα f συνεχής στο $(0,+\infty)$

▷ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}+1\right)=-\infty\cdot(+\infty)+1=-\infty$

Η ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) ασύμπτωτη της C_f

▷ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to}\frac{\ln x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln x}{x-1}=0\cdot0=0=\lambda$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}=0=\beta$ Η $y=0$ $(x'x)$ ασύμπτωτη στο $+\infty$

Δ2. Για $x\in(0,1)$ $f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow\ln x=1\Rightarrow x=e$ απορρίπτεται

$x\in(1,+\infty)$ $f'(x)=0\Rightarrow\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=0\Rightarrow 1-\frac{1}{x}-\ln x=0$

$\Rightarrow -\ln x=\frac{1}{x}-1\Rightarrow\ln\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-1\Rightarrow\frac{1}{x}=1\Rightarrow x=1$

απορρίπτεται

αφού $\ln x \le x-1$, για κάθε $x>0$. Το "=" ισχύει για $x=1$.

Άρα $\ln\frac{1}{x} \le \frac{1}{x}-1$ το "=" ισχύει για $\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=1$

Ελέγχω αν η f παραγωγίσιμη στο $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\ln x}{x}+\cancel{1}-\cancel{1}}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\ln x - x+1}{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x - x+1}{(x-1)^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1. Το 1 κρίσιμο σημείο.

Δ3. Για $x=1$ $f(1)=1\neq 0$

Για $x>1$: $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ και $\ln x>0$ και $x-1>0$ άρα $f(x)>0$.

Για $x\in(0,1)$: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+1$ με $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$ αφού $x^2>0$ και $\ln x<0 \Rightarrow -\ln x>0 \Rightarrow 1-\ln x>1$. Η f ↗ $(0,1)$

$$f((0,1)) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-\infty, 1)$$

Το $0\in f((0,1))$ άρα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)=0$

Η f ↗ $(0,1)$ άρα το x_0 μοναδικό

ii) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_{x_0}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{x_0}^{1} f(x)\,dx$

x	0		x_0		1
f	‖	$-$	0	$+$	‖

$$\Rightarrow E = \int_{x_0}^{1} \left(\ln x\cdot \frac{1}{x}+1\right)dx = \int_{x_0}^{1} \left[\ln x(\ln x)'+1\right]dx$$

$$\Rightarrow E = \left[\frac{1}{2}\ln^2 x + x\right]_{x_0}^{1} = \frac{1}{2}\ln^2 1 + 1 - \left(\frac{1}{2}\ln^2 x_0 + x_0\right)$$

$$\Rightarrow E = 1 - \frac{1}{2}(\ln x_0)^2 - x_0.$$ Όμως $f(x_0)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0}{x_0}+1=0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0 \quad (2)$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} E = 1-\frac{1}{2}(-x_0)^2 - x_0$$

$$\Rightarrow E = 1 - \frac{1}{2}x_0^2 - x_0 = \frac{-x_0^2-2x_0+2}{2}$$

Δ4. Για $x>1$ ισχύει $F'(x)=f(x)$ και

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2} = \frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2} < 0$$ για $x>1$ αφού

$\ln x \le x-1 \Rightarrow \ln\frac{1}{x} \le \frac{1}{x}-1$, το "=" μόνο για $x=1$

$\Longrightarrow 1-\frac{1}{x}+\ln 1-\ln x \le 0$ Αφού $x>1 \Rightarrow \frac{1}{x}<1$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{x}-\ln x<0$

Β' τρόπος

$$F''(x) = \frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2} = \frac{\varphi(x)}{x(x-1)^2}$$

$\phi(x) = x-1-x\ln x$ και $\phi(1)=0$. Είναι $\phi'(x) = 1-1-\ln x = -\ln x<0$ για $x>1$

Οπότε $\phi \downarrow$. Άρα $x>1 \Rightarrow \phi(x)<\phi(1) \Rightarrow \phi(x)<0 \Rightarrow F''(x)<0$, $F' \downarrow$

$$(x+1)F(x) > x\cdot F(1) + F(x^2) \Rightarrow x\cdot F(x) + F(x) > x\cdot F(1) + F(x^2)$$

$$\Rightarrow x F(x) - x\cdot F(1) > F(x^2) - F(x)$$

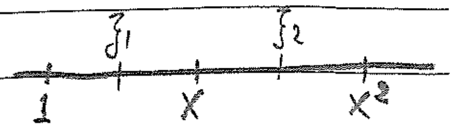
$$\Rightarrow x\cdot\left(F(x) - F(1)\right) > F(x^2) - F(x)$$

$:x>0$

$$\Rightarrow F(x) - F(1) > \frac{F(x^2)-F(x)}{x}$$

$:(x-1)>0$

$$\Rightarrow \frac{F(x)-F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2)-F(x)}{x(x-1)} \quad (3)$$



Η F συνεχής στα $[1,x]$ και $[x,x^2]$ και παραγωγίσιμη στα $(1,x)$ και (x,x^2)

Από ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in (1,x)$ και $\xi_2 \in (x,x^2)$ με $F'(\xi_1) = \frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

και $F'(\xi_2) = \frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x}$.

$F' \searrow$

Άρα $(3) \Leftrightarrow F'(\xi_1) > F'(\xi_2) \Leftrightarrow \xi_1 < \xi_2$ ισχύει