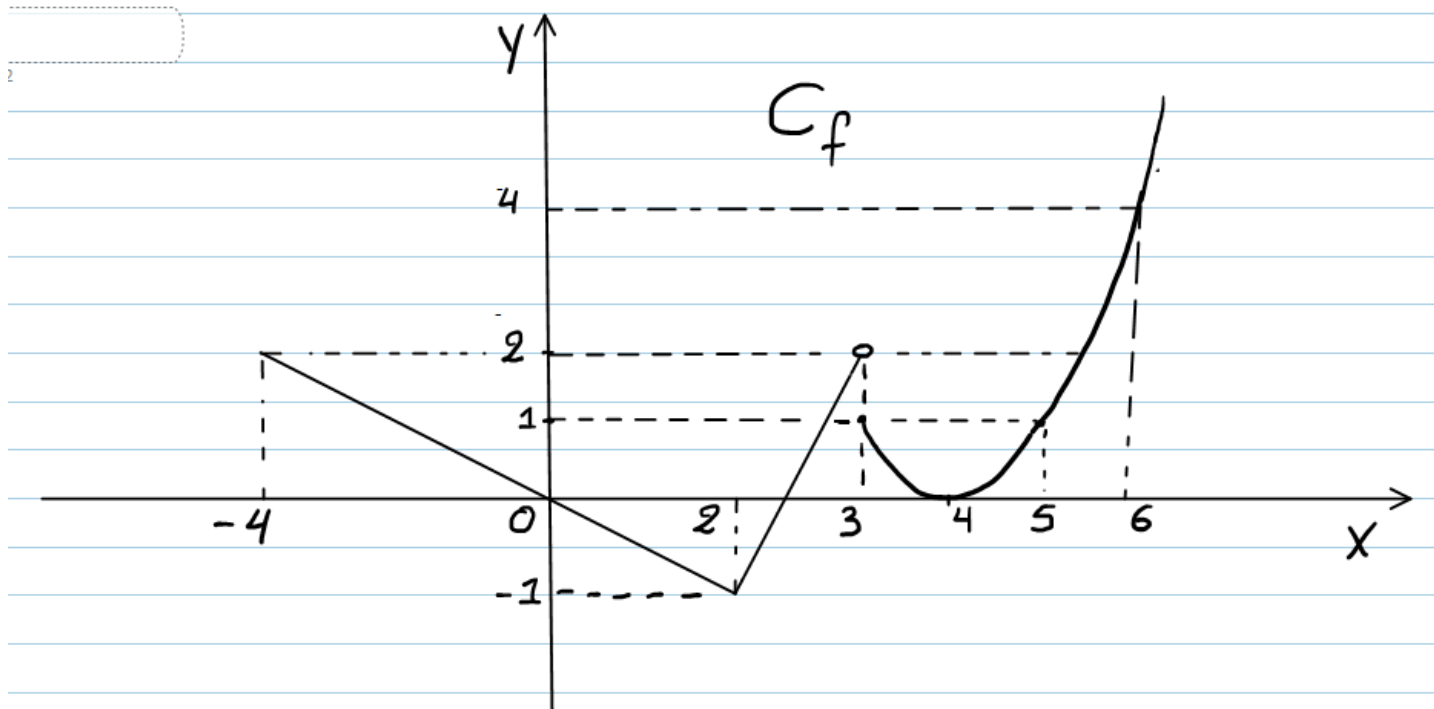


ΘΕΜΑ Β-ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f ΜΕ ΣΧΗΜΑ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$.

B2. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

$$A = \lim_{x \rightarrow -4} f(x) \quad B = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad \Gamma = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)} \quad \Delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \quad E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cdot f(x)}$$

$$Z = \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} \quad H = \lim_{x \rightarrow 6} f(f(x)) \quad \Theta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$$

B3. Να αιτιολογήσετε αν η f είναι:

i. συνεχής συνάρτηση.

ii. συνεχής στο $[3, 6]$

iii. παραγωγίσιμη στο $x_0=3$

iv. συνάρτηση ένα προς ένα.

B4. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακρότατά της (τοπικά και ολικά).

B5. Εάν $g(x) = \ln(-2 - x)$ και $h(x) = \sqrt{x - 4}$, να εξετάσετε αν ορίζονται οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $h \circ f$. Αν ναι, να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.

B6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I = \int_{-4}^0 f(x)dx$ και $J = \int_0^2 f(x)dx$

B7. Να βρείτε διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο

- i. να ισχύει το συμπέρασμα το Θ .Bolzano όχι όμως και οι προϋποθέσεις του.
- ii. να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ .Rolle.

B8. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f'(x)$ για κάθε $x \in [-4, 3)$.

B9. Να δείξετε πως υπάρχει $\xi \in (3, 6)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$

B10. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$, για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$.

B11. Έστω F μία αρχική της f στο διάστημα $\Delta = [-4, 3)$. Με βάση το σχήμα να βρείτε:

- i. την μονοτονία και τις θέσεις ακροτάτων της F .
- ii. την κυρτότητα και τις θέσεις των σημείων καμπής της F .

B12. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $|f|$ και $-f$.

B13. Δίνεται επιπλέον πως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x \geq 3$, προκύπτει από αυτήν της $h(x) = x^2$ με μετατόπιση 4 μονάδες δεξιά. Να βρείτε τον τύπο της f για κάθε $x \in A$.

B14. Εάν η συνάρτηση $Q(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[4, +\infty)$, ενώ ισχύει $Q(x) > 0$ για κάθε $x \in [3, +\infty)$ τότε να βρεθεί μονοτονία των συναρτήσεων :

$$A(x) = Q(x) - f(x) \text{ και } B(x) = \frac{f(x)}{Q(x)} \text{ για κάθε } x \in [3, +\infty).$$

“Oh, sing with me, sing for the year
Sing for the laughter, and sing for the tear
Sing it with me, if it's just for today
Maybe tomorrow, the good Lord will take you away
Dream on, Dream on”

DREAM ON
SONG BY AEROSMITH