

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

No1

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

Πέμπτη 21 Απριλίου 2022

Ώρα έναρξης 9:00

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ . Εάν

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ
- τότε να αποδείξετε πως η f είναι σταθερή στο Δ .

Μονάδες 5

A2. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

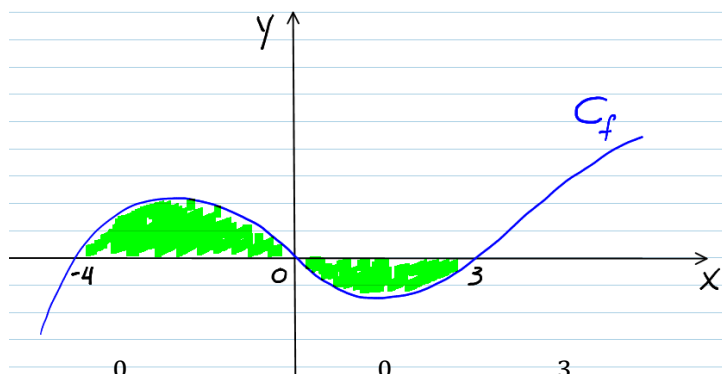
Μονάδες 5

A3. Δίνεται η ακολουθία a_n . Ποιο από τα παρακάτω όρια είναι καλά ορισμένο;

$$i. \lim_{n \rightarrow -\infty} a_n \quad ii. \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad iii. \lim_{n \rightarrow 1} a_n \quad iv. \lim_{n \rightarrow 0^+} a_n$$

Μονάδες 3

A4. Στο παρακάτω σχήμα το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι ίσο με:



$$i. \int_{-4}^3 f(x) dx \quad ii. \int_{-4}^0 |f(x)| dx \quad iii. \int_{-4}^0 f(x) dx - \int_0^3 f(x) dx \quad iv. \int_{-4}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$$

Μονάδες 3

A5. i. Αν οι εφαπτομένες των $f(x)=\ln x$ και $g(x)=2x^2$ στο σημείο x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

α. 0 β. 1/4 γ. 1/2 δ. 1 ε. 2 Μονάδες 2

ii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε :

α. Είναι και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ Σ / Λ

β. Έχει ρίζα στο $[\alpha, \beta]$ Σ / Λ

γ. Έχει μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$. Σ / Λ

δ. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$. Σ / Λ

ε. Είναι συνεχής στο $x=\alpha$ Σ / Λ

Μονάδες 5

iii. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1 \text{ και } g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη;

α. η g είναι συνεχής στο 2

β. η f είναι συνεχής στο 1

γ. η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

δ. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f .

Μονάδες 3+2+2+1

B2. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Μονάδες 1 + 2 + 3

Με βάση τα ερωτήματα B1, B2 να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Μονάδες 4

B3. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο $K(2, -4)$.

Μονάδες 4

B4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην C_f και τον άξονα x' .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + k, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \lambda x, & x < 1 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $k = \lambda = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Μονάδες 4

Γ3. i. Να δείξετε πως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική αρνητική ρίζα x_0

ii. Να δείξετε πως η εξίσωση :

$$(1 - x^4) \cdot (x_0 - \eta\mu x_0) = x^3 \cdot \frac{f(x_0 + 2022)}{x_0}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 4+6=10

Γ4. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 1$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε, για την στιγμή t_0 , τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $ΜΟΚ$, όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x + x^2 - \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$, όπου a θετικός πραγματικός για τον οποίο ισχύει: $a^x + 2^{-x} \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στην $y = (\ln 2 - 2) \cdot x$, στο σημείο της με τετμημένη $x = 0$.

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ .

Μονάδες 6

Για $\alpha = \beta = 2$ και $\gamma = -1$:

Δ2. Να δείξετε πως η f είναι κυρτή και πως η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα x σε δύο ακριβώς σημεία με τετμημένες $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

Μονάδες 2+4=6

Δ3. Να δείξετε ότι

i. η f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο σε σημείο x_0 και να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου.

Μονάδες 5

$$\text{ii. } \int_0^{x_0} x \cdot f''(x) dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(x) \cdot \eta \mu t dt, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι : $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx > \frac{(\ln 2 - 2) \cdot \ln 2}{2}$

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στην κόλλα σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:30.

Ευχόμαστε Επιτυχία!

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ