Διαγώνισμα Προσομοίωσης Νο 1. - 21 Απριλίου 2022

Ενδεικτικές Λύσεις

A1. Σχολικό Βιβλίο - Σελ 133

A2. Σχολικό Βιβλίο - Σελ 216

A3. (ii)

A4. (iii)

A5 i) γ   ii) α → Λ   β → Λ   γ → Σ   δ → Σ   ε → Λ

(iii) γ

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=x^3-3x+2$

Β1. f συνεχής στο $A=\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική

$f'(x)=3x^2-3$, λύνω $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

Η f ↗ $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$

f ↘ $[-1,1]$

Το $f(-1)=4$ τοπικό μέγιστο

Το $f(1)=0$ τοπικό ελάχιστο

$f''(x)=6x$, λύνω $f''(x)=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$	σκ	$\smile$	

Η f κοίλη στο $(-\infty,0]$

κυρτή στο $[0,+\infty)$

Το σημείο $M(0,f(0))$, δηλ $M(0,2)$ σημείο καμπής της C_f.

Β2. Η f ως πολυώνυμο 3ου βαθμού δεν έχει ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

Για τον σχεδιασμό βρίσκουμε και τα σημεία τομής με τον $x'x$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0$

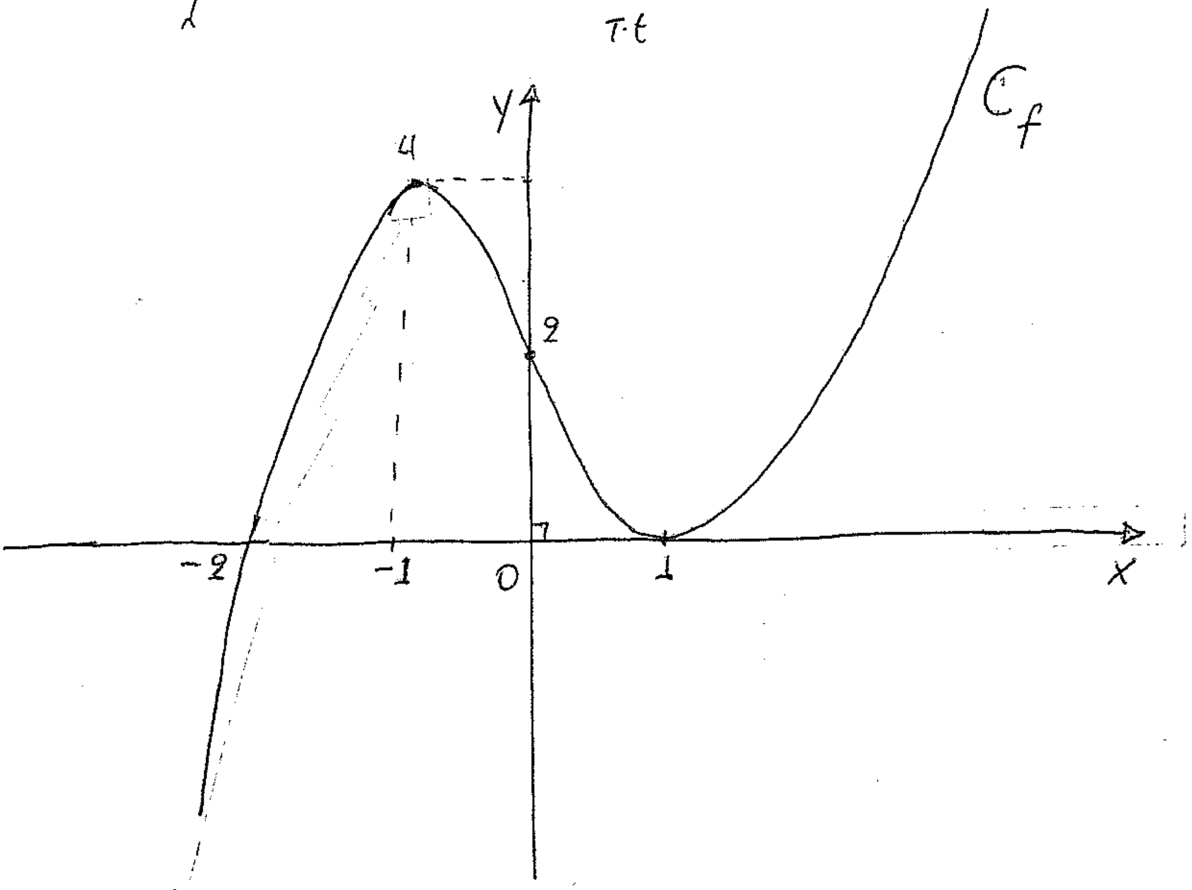
1	0	-3	2	$\rho=1$
///	1	1	-2	
1	1	-2	0	

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=1$ ή $x=-2$

$x=1$, διπλή ρίζα ή $x=-2$

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f		$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	σ.Κ	$\searrow$	Τ.ε	$\nearrow$	



B3. Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη είναι

(ε) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y-(x_0^3-3x_0+2) = (3x_0^2-3)(x-x_0)$

$\xRightarrow{(2,-4)} -4 - x_0^3+3x_0-2 = (3x_0^2-3)(2-x_0)$

$\Rightarrow -x_0^3 + \cancel{3x_0} - \cancel{6} = 6x_0^2 - 3x_0^3 - \cancel{6} + \cancel{3x_0} \Rightarrow 2x_0^3 - 6x_0^2 = 0$

$\Rightarrow 2x_0^2(x_0-3)=0 \Rightarrow x_0=0$ ή $x_0=3$

Έχουμε 2 εφαπτόμενες

$\varepsilon_1 : y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 2 = -3x \Rightarrow y = -3x - 2$

$\varepsilon_2 : y - f(3) = f'(3)(x-3) \Rightarrow y - 20 = 24(x-3) \Rightarrow y = 24x - 52$

B4. Χρησιμοποιούμε τις ρίζες και το πρόσημο της $f(x)$.

Οι ρίζες βρέθηκαν στο B2

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται

με $E = \int_{-2}^{1} |f(x)|\,dx \overset{f\geq 0}{=} \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\,dx$

$\Rightarrow E = \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - (4 - 3\cdot 2 - 4) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 8$

$E = \frac{1 - 6 + 32}{4} = \frac{27}{4}$ τ.μ

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} x^2+k, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\lambda x, & x<1 \end{cases}$$

Γ1 Αφού η f παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής.

<u>Συνέχεια στο $x_0=1$</u>

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}(x^2+k)=\lim_{x\to 1^-}(e^{x-1}+\lambda x)$$

$$\Rightarrow 1+k=e^0+\lambda \Rightarrow k=\lambda \ (1) \quad \text{άρα} \quad f(x)=\begin{cases} x^2+k, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+kx, & x<1 \end{cases}$$

<u>Παραγωγίσιμη στο $x=1$</u>

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+k-(1+k)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+kx-(1+k)}{x-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+kx-1-k}{x-1}$$

$$\xrightarrow[D.L.H]{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+k}{1} \Rightarrow 2=e^0+k \Rightarrow k=1.$$

άρα $\lambda=1$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+x, & x<1. \end{cases}$$

- Για $x\geq 1$ (f παρ/μη) $f'(x)=2x>0$, για κάθε $x\geq 1$.

Για $x<1$: $f'(x)=e^{x-1}+1>0$, για κάθε $x<1$.

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

f συνεχής και $f \uparrow$ άρα $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1} + x\right) = 0 + (-\infty) = -\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} \overset{y=x-1}{=\!=} \lim\limits_{y\to-\infty} e^{y} = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ Οπότε $f(A) = (-\infty, +\infty)$

Γ3. i) Το $0 \in f(A)$ άρα υπάρχει $x_0 \in A$ με $f(x_0) = 0$

Η $f \uparrow A$ και "1-1" οπότε το x_0 μοναδικό.

Θέλω νδο $x_0 < 0$.

Είναι $x_0 < 0 \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} f(x_0) < f(0) \Leftrightarrow 0 < e^{-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{e}$, ισχύει.

ii) Θεωρούμε $\phi(x) = (1-x^4)(x_0 - \eta\mu x_0) - x^3 \frac{f(x_0+2022)}{x_0}$

• Η ϕ συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική.

• $\phi(0) = (x_0 - \eta\mu x_0) < 0$ διότι $|\eta\mu x| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le \eta\mu x \le |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Το "=" μόνο για $x = 0$.

$x_0 < 0$ άρα $x_0 < \eta\mu x_0 < -x_0 \Rightarrow x_0 - \eta\mu x_0 < 0$

$\phi(1) = 0 - 1\frac{f(x_0+2022)}{x_0} > 0$, διότι $x_0 < 0$ και $x_0 + 2022 > x_0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$

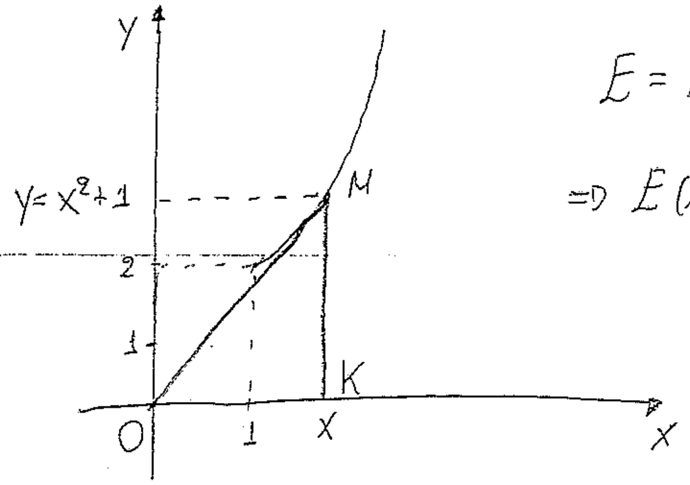
$f(x_0+2022) > f(x_0) \Rightarrow$

$f(x_0+2022) > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλ. ρίζα στο $(0,1)$ της εξίσωσης

$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x^4)\cdot(x_0 - \eta\mu x_0) - x^3 \frac{f(x_0+2022)}{x_0} = 0$

Γ4. Για $x \geq 1$ είναι $y = f(x) = x^2 + 1$ άρα $y(t) = x^2(t) + 1$



$$E = MOK = \frac{1}{2} OK \cdot MK = \frac{1}{2} |x| \cdot |x^2+1| \quad \begin{pmatrix} x \geq 1 \\ x^2+1>0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{1}{2} x \cdot (x^2+1) \Rightarrow E(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$$

Επομένως $E(t) = \frac{1}{2}\left(x^3(t) + x(t)\right)$

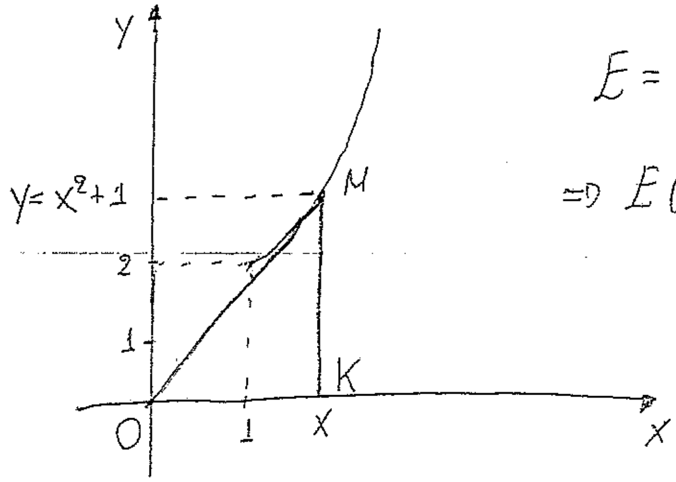
και $E'(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)\right)$

$$\Rightarrow E'(t) = \frac{1}{2} x'(t) \cdot \left(3x^2(t) + 1\right)$$

Για $t = t_0$: $x(t_0) = 3$ και $x'(t_0) = 2$ οπότε

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(3 \cdot 3^2 + 1\right) = 28 \text{ τ.μ/δευτερόλεπτο}$$

Γ4. Για $x \ge 1$ είναι $y = f(x) = x^2+1$ άρα $y(t) = x^2(t)+1$



$E = MOK = \frac{1}{2} OK \cdot MK = \frac{1}{2} |x| \cdot |x^2+1|$ $\begin{pmatrix} x \ge 1 \\ x^2+1>0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E(x) = \frac{1}{2} x \cdot (x^2+1) \Rightarrow E(x) = \frac{1}{2}(x^3+x)$

Επομένως $E(t) = \frac{1}{2}\left(x^3(t) + x(t)\right)$

και $E'(t) = \frac{1}{2}\cdot\left(3x^2(t)\cdot x'(t) + x'(t)\right)$

$\Rightarrow E'(t) = \frac{1}{2} x'(t)\cdot\left(3x^2(t)+1\right)$

Για $t=t_0$: $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$ οπότε

$E'(t_0) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(3\cdot 3^2+1\right) = 28$ τ.μ/δευτερόλεπτο

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\alpha^x + 2^{-x} \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρώ $g(x) = \alpha^x + 2^{-x}$

Άρα $g(x) \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$, αφού $g(0) = \alpha^0 + 2^0 = 2$

Η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

με $g'(x) = \alpha^x \ln\alpha + 2^{-x}\ln 2 \cdot (-x)' = \alpha^x \ln\alpha - 2^{-x}\ln 2$

Από Θεώρημα Fermat : $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln\alpha - 2^0 \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \ln 2$

$\Leftrightarrow \alpha = 2$. και $f(x) = 2^x + x^2 - \beta x + \gamma$.

Η C_f εφάπτεται στην $y = (\ln 2 - 2)x$ στο $x_0 = 0$ άρα

$$\begin{cases} f(0) = (\ln 2 - 2)\cdot 0 \\ f'(0) = \ln 2 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2^0 + 0 - \beta\cdot 0 + \gamma = 0 \\ 2^0 \ln 2 + 2\cdot 0 - \beta = \ln 2 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + \gamma = 0 \\ \cancel{\ln 2} - \beta = \cancel{\ln 2} - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Ισχύει $f'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - \beta$

Τελικά $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$f'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2$, $f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η

η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία με τετμημένη τις λύσεις

της εξίσωσης $f(x) = 0$

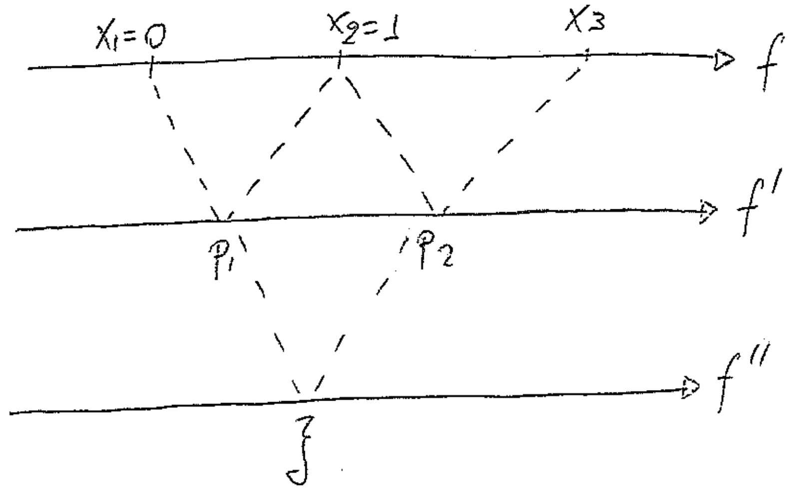
Είναι $f(1) = 2^1 + 1 - 2 - 1 = 3 - 3 = 0$ και $f(0) = 2^0 + 0 - 2\cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Επομένως τα $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ είναι ρίζες της f

Αρκεί να δείξουμε πως η $f(x)=0$ δεν έχει και άλλη ρίζα.

Έστω πως υπάρχει και τρίτη ρίζα, x_3, της f (έστω $x_3>1$)

δηλ. $f(x_3)=0$



- Η f συνεχής στα $[0,1]$ και $[1,x_3]$

  f παρ/μη στα $(0,1)$ και $(1,x_3)$ με $f'(x)=2^x \ln 2 + 2x - 2$

  $f(0)=f(1)=0$ και $f(1)=f(x_3)=0$

  Από Θεώρημα Rolle υπάρχουν $\rho_1\in(0,1)$ και $\rho_2\in(1,x_3)$ με

  $f'(\rho_1)=0=f'(\rho_2)$

- Η f' συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ και παρ/μη στο (ρ_1,ρ_2) με $f''(x)=2^x \ln^2 2 + 2$

  Από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ με $f''(\xi)=0$. Άτοπο αφού $f''(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η $f(x)=0$ δεν μπορεί να έχει και τρίτη ρίζα.

Οπότε έχει δύο ακριβώς ρίζες τις $x_1=0$ και $x_2=1$.

Δ3. (i) Η f συνεχής στο $[0,1]$ και παρ/μη στο $(0,1)$

Επίσης $f(0)=f(1)=0$.

Από Θ.Rolle υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ με $f'(x_0)=0$.

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Είδαμε πως $f''>0$ άρα $f' \uparrow \mathbb{R}$

Για $x<x_0 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x)<f'(x_0)=0$

Για $x>x_0 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x)>f'(x_0)=0$

Άρα $f \downarrow (-\infty, x_0]$ και $f \uparrow [x_0,+\infty)$ οπότε το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο

(ii) $\displaystyle\int_0^{x_0} x\cdot f''(x)\,dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\cdot ημt\,dt \iff [x\cdot f'(x)]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} (x)' f'(x)\,dx \geq f(x)\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ημt\,dt$

παραγοντική

Μεταβλητή το t

$\displaystyle\iff x_0\cdot \underbrace{\cancel{f'(x_0)}}_{0} - 0\cdot f'(0) - \int_0^{x_0} f'(x)\,dx \geq f(x)\,[-συνt]_{\pi/2}^{0}$

$\displaystyle\iff -[f(x)]_0^{x_0} \geq f(x)\cdot\left(-συν0 + συν\frac{\pi}{2}\right) \iff \underbrace{\cancel{f(0)}}_{0} - f(x_0) \geq -f(x)$

$\iff f(x_0) \leq f(x)$, που ισχύει αφού το $f(x_0)$ ελάχιστο της f.

Δ4. Η f κυρτή και η $y=(ln2-2)x$ εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$.

Ισχύει $f(x) \geq (ln2-2)x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το "=" μόνο για $x=0$.

$\displaystyle\xRightarrow{:(x^2+1)} \frac{f(x)}{x^2+1} \geq \frac{(ln2-2)x}{x^2+1} \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx > \int_0^1 (ln2-2)\frac{x}{x^2+1}\,dx \quad (1)$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx > (\ln 2-2)\int_0^1 \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = (\ln 2-2)\,\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx > \frac{1}{2}(\ln 2-2)(\ln 2-\ln 1) = \frac{1}{2}(\ln 2-2)\ln 2 .$$

Καλά αποτελέσματα