ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α4. δ) Πρέπει να ικανοποιείται και η συνέχεια στο $x_0=1$ για την F.

ΘΕΜΑ Β

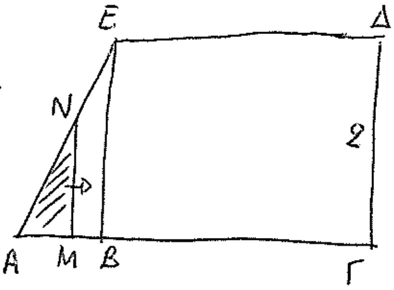
Β1. Τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΑΒΕ είναι όμοια καθώς έχουν:

$\hat{A}=\hat{A}$, $\hat{M}=\hat{B}=1\llcorner$ οπότε και $\hat{N}=\hat{E}$.

Επομένως $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AE}=\frac{MN}{BE} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BE} \Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{MN}{2} \Rightarrow MN=2x$

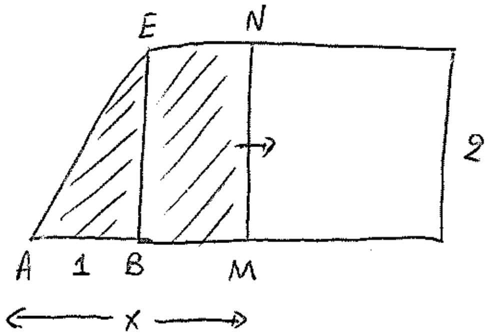
Β2. Για $x\in[0,1]$ δηλαδή όσο το Μ διατρέχει το ΑΒ:

$$E=(\overset{\Delta}{AMN})=\frac{1}{2}AM\cdot MN \overset{(B1)}{=} \frac{1}{2}x\cdot 2x = x^2.$$



Για $x\in(1,3]$ δηλαδή όσο το Μ διατρέχει το ΒΓ:

$$E=(AMNE)=(ABE)+(BMNE)$$
$$=\frac{1}{2}1\cdot 2 + BM\cdot MN = 1+(x-1)\cdot 2$$
$$=2x-1$$



Τελικά $E(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1 \\ 2x-1, & 1<x\le 3 \end{cases}$

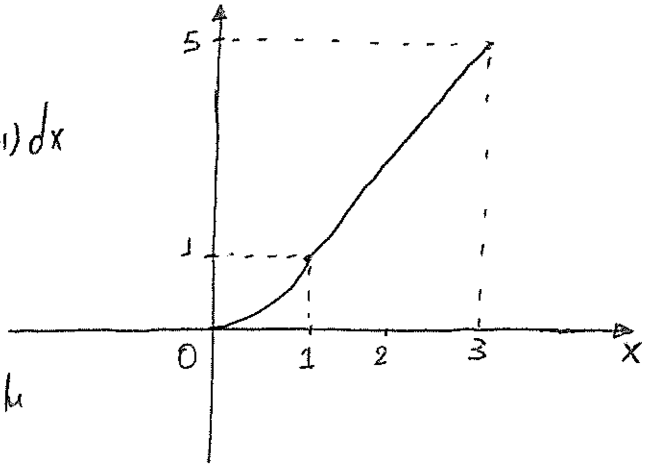
Β3

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{E(x)-E(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{E(x)-E(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-1-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-2}{x-1}=2 \end{array}\right\}$$

Η E παρ/μη στο $x_0=1$ με $f'(1)=2$

Η ζητουμένη εφαπτομένη είναι (ε) $y - E(1) = E'(1)\cdot(x-1) \Rightarrow y - 1 = 2(x-1)$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 1$.



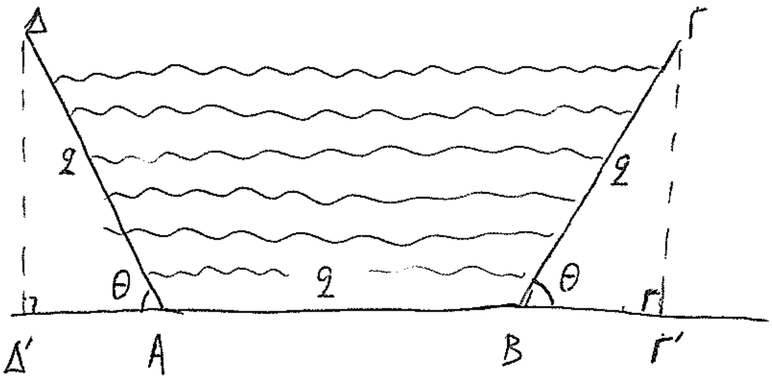
Β4. $E(2) = \int_0^2 |f(x)|\,dx \overset{f\geq 0}{=} \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2x-1)\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - x\right]_1^2$

$= \frac{1}{3} - 0 + 4 - 2 - (1-1) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Φέρουμε $\Delta\Delta' \perp AB$ και $\Gamma\Gamma' \perp AB$



Ισχύει $\overset{\triangle}{\Delta\Delta' A} = \overset{\triangle}{B\Gamma\Gamma'}$ αφού

$\hat{\Delta'} = \hat{\Gamma'}$

$A\Delta = B\Gamma$

$\hat{A} = \hat{B} = \theta$

Άρα $A\Delta' = B\Gamma'$ (1). Είναι $E_{\text{τραπεζίου}} = \dfrac{(\Gamma\Delta + AB)\cdot\Delta'\Delta}{2} = \dfrac{(AB + \Delta'A + \Gamma'B + AB)\Delta'\Delta}{2}$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} E_{\text{τραπ}} = \dfrac{(2AB + 2\Delta'A)\cdot\Delta'\Delta}{2} = (AB + \Delta'A)\cdot\Delta'\Delta \quad (2)$

Στο $\overset{\triangle}{A\Delta\Delta'}$: $\eta\mu\theta = \dfrac{\Delta'\Delta}{A\Delta} = \dfrac{\Delta'\Delta}{2} \Rightarrow \Delta'\Delta = 2\eta\mu\theta$.

$\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\Delta'A}{A\Delta} = \dfrac{\Delta'A}{2} \Rightarrow \Delta'A = 2\sigma\upsilon\nu\theta$

Οπότε από (2) $E(\theta) = (2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot 2\eta\mu\theta = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Γ2. Η συνάρτηση E είναι συνεχής στο $(0,\frac{\pi}{2})$ ως πράξεις συνεχών.

$$E'(\theta)=4\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)+\eta\mu\theta\cdot(-\eta\mu\theta)\right]=4\cdot\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu^2\theta\right)$$

$$\xRightarrow{\eta\mu^2\theta=1-\sigma\upsilon\nu^2\theta} E'(\theta)=4\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1+\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)=4\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1\right)$$

Λύνουμε $E'(\theta)=0 \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=-1$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$.

απορρίπτεται αφού $\sigma\upsilon\nu\theta>0$ στο $(0,\pi/2)$ $\Rightarrow \theta=\pi/3$

E' συνεχής στα $(0,\pi/3)$ και $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ και ισχύει $E'\neq 0$. Άρα η E' διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα αυτά.

θ	0		$\pi/3$		$\pi/2$
E'		$+$	0	$-$	
E		$\nearrow$	ο.μ.	$\searrow$	

$$E'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\left(2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$$
$$=4\left(2\,\frac{2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=2\sqrt{2}>0$$

άρα $E'>0$ στο $(0,\pi/3)$.

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}E'(\theta)=4\left(2\cdot 0+0-1\right)=-4<0$$ άρα η $E'(\theta)<0$ στο $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$.

Οπότε η $E(\theta)$ παρουσιάζει μέγιστο για $\theta=\frac{\pi}{3}$, που είναι και η ζητούμενη γωνία.

Γ3. α. Η $\varphi(\theta)$ συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\left.\begin{aligned}\varphi(0)&=4\cdot\sigma\upsilon\nu 0+1=5>0\\ \varphi(\pi)&=4\cdot\sigma\upsilon\nu\pi+1=-4+1=-3<0\end{aligned}\right\}\ \phi(0)\cdot\phi(\pi)<0$$

Από Θ. Bolzano η $\phi(x)=0$ έχει μια τουλ. ρίζα $\theta_0\in(0,\pi)$

$\phi'(\theta)=-4\cdot\eta\mu\theta<0$ για κάθε $\theta\in(0,\pi)$ αφού $\eta\mu\theta>0$ στο $(0,\pi)$

Η $\phi(\theta)\downarrow$ και "1-1" άρα η ρίζα μοναδική.

Το πρόσημό της φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Για $\theta<\theta_0 \overset{\phi \downarrow}{\Longrightarrow} \varphi(\theta)>\varphi(\theta_0)=0$

$\theta>\theta_0 \overset{\phi \downarrow}{\Longrightarrow} \phi(\theta)<\phi(\theta_0)=0$

θ	0		θ_0		π
$\varphi(\theta)$		$+$	0	$-$	

β. $E'(\theta)=4\cdot(2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1)$

$E''(\theta)=4\cdot\left(4\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(-\eta\mu\theta)-\eta\mu\theta\right)=-4\cdot\eta\mu\theta\cdot(4\sigma\upsilon\nu\theta+1)=-4\cdot\eta\mu\theta\cdot\phi(\theta)$

Ισχύει $-4\eta\mu\theta<0$, για κάθε $\theta\in(0,\pi)$.

Το πρόσημο της E'' καθορίζεται από την $\phi(\theta)$ και φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

θ	0		θ_0		π
$-4\eta\mu\theta$		$-$		$-$	
$\phi(\theta)$		$+$	0	$-$	
$E''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$E(\theta)$		$\frown$	σκ	$\smile$	

$E(\theta)$ κοίλη στο $(0,\theta_0]$ και κυρτή στο $[\theta_0,\pi)$. Άρα το $M(\theta_0,E(\theta_0))$ είναι σημείο καμπής της C_E.

Γ4. Δίνεται πως $\theta=\theta(t)$ και $\theta'(t_0)=-\frac{1}{4}$ rad/s. (η γωνία μικραίνει)

$E(t)=4\cdot\eta\mu\theta(t)\cdot[1+\sigma\upsilon\nu\theta(t)]$

$E'(t)=4\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\theta(t)\cdot\theta'(t)\left(1+\sigma\upsilon\nu\theta(t)\right)+\eta\mu\theta(t)\cdot\left(-\eta\mu\theta(t)\cdot\theta'(t)\right)\right]$

$=4\cdot\theta'(t)\cdot\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)+\sigma\upsilon\nu\theta(t)-1\right)$

Για $t=t_0$: $\theta'(t_0)=-\frac{1}{4}\frac{rad}{s}$ και $\theta(t_0)=\frac{\pi}{4}$ άρα $\sigma\upsilon\nu\theta(t_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ισχύει $E'(t_0)=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\left(2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=-1\cdot\left(2\frac{2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ τ.μ./s.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί να δείξω πως η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,e)$.

Θεωρώ $K(x)=f(x)-g(x)=\ln x-\frac{1}{x}$.

Η K συνεχής στο $[1,e]$ ως διαφορά συνεχών.

$$\left.\begin{aligned} K(1)&=\ln 1-1=-1<0 \\ K(e)&=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}>0 \end{aligned}\right\} K(1)\cdot K(e)<0$$

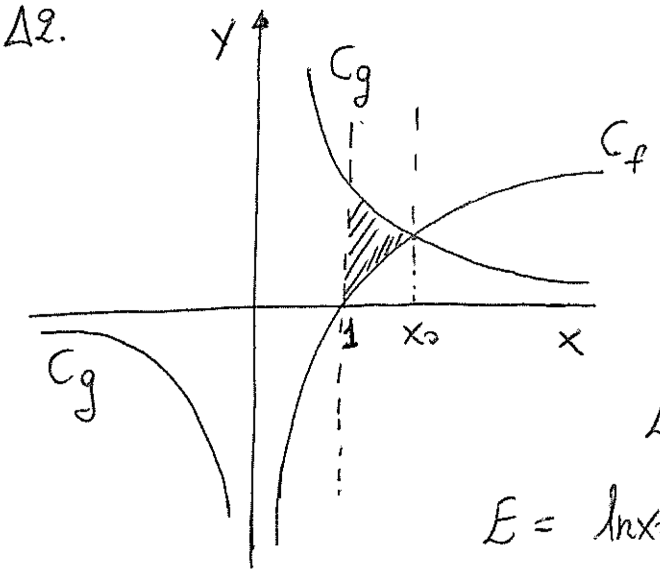
Οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,e)$ ώστε $K(x_0)=0$.

Είναι $K'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0,\ \forall x\in(1,e)$ άρα $K \uparrow$ και το x_0 μοναδικό.

Για το x_0 έχουμε $K(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0 \Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{x_0}$. (1)

Η κλίση της C_f στο x_0 είναι ίση με: $\lambda=f'(x_0)=\frac{1}{x_0}\overset{(1)}{=}\ln x_0=f(x_0)$.

Δ2.



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_1^{x_0}|f(x)-g(x)|\,dx \ \underset{=}{\overset{g(x)\geq f(x)}{}}$$

$$E=\int_1^{x_0}(g(x)-f(x))\,dx=\int_1^{x_0}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)dx$$

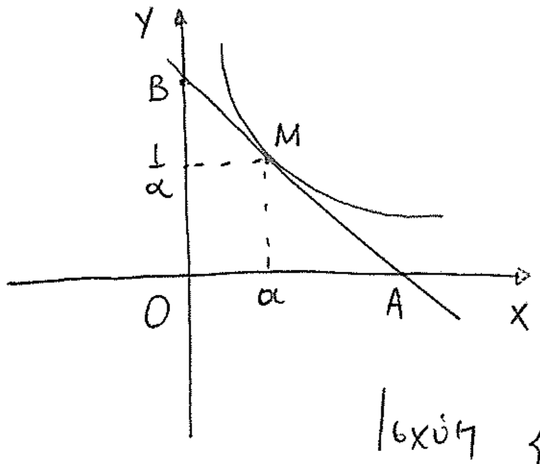
$$E=\Big[\ln x-(x\ln x-x)\Big]_1^{x_0}$$

$$E=\ln x_0-(x_0\ln x_0-x_0)-\big(\cancel{\ln 1}-(1\cdot\cancel{\ln 1}-1)\big)$$

$$E=\ln x_0-x_0\ln x_0+x_0-1=\ln x_0(1-x_0)-(1-x_0)=(1-x_0)(\ln x_0-1)$$

Δ3. Έστω (ε) $y-g(a)=g'(a)(x-a)$ η εφαπτομένη

(i) Είναι (ε) $y-\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha^2}(x-a) \Rightarrow y=-\frac{1}{a^2}\cdot x+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha} \Rightarrow y=-\frac{1}{a^2}\cdot x+\frac{2}{a}$.



Τομή με x'x: $y=0 \Rightarrow -\frac{1}{\alpha^2}x+\frac{2}{\alpha}=0 \Rightarrow \frac{2}{\cancel{\alpha}}=\frac{1}{\alpha^{\cancel{2}}}x$

$\Rightarrow x=2a$. $A(2a,0)$

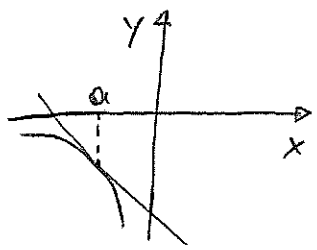
Τομή με y'y: $x=0 \Rightarrow y=\frac{2}{\alpha}$. $B(0,\frac{2}{\alpha})$

Ισχύει $\begin{cases} \frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2a+0}{2}=a=x_M \\ \frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+\frac{2}{\alpha}}{2}=\frac{1}{\alpha}=y_M \end{cases}$ Άρα το M είναι μέσο του AB

(ii) $(AOB)=\frac{1}{2}(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{2}{a}\right|\cdot|2a|=\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{|a|}\cdot 2|a|=2$ τ.μ

<u>Σχόλιο</u>

Η απόλυτη τιμή είναι απαραίτητη καθώς ενδέχεται το $a<0$



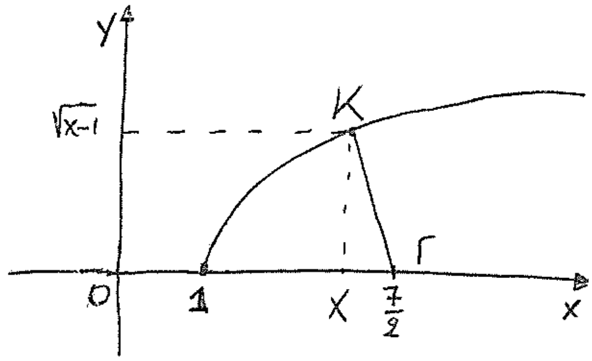
<u>Δ4</u>

$\phi(x)=(f\circ h)(x)=\ln e^{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}$.

Πρέπει $\begin{cases} x\in D_h \\ h(x)\in D_f \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1 \\ e^{\sqrt{x-1}}>0, \text{ ισχύει } \forall x\geq 1 \end{cases}$ άρα $D_\varphi=[1,+\infty)$

Έστω σημείο $K(x,\sqrt{x-1})$ της C_φ.

Η απόσταση $d(x)=K\Gamma$ είναι



$d(x)=\sqrt{(x_\Gamma-x_\Gamma)^2+(y_K-y_\Gamma)^2}=\sqrt{(x-\frac{7}{2})^2+(\sqrt{x-1}-0)^2}$

$=\sqrt{x^2-\cancel{2}\frac{7}{\cancel{2}}x+\frac{49}{4}+x-1}=\sqrt{x^2-6x+\frac{45}{4}}$

Η d συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

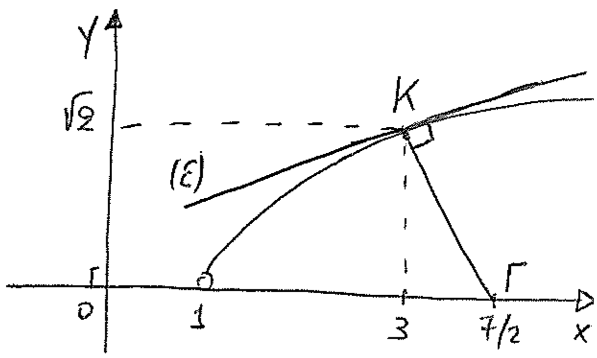
$$d'(x)=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+\frac{45}{4}}}=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+\frac{45}{4}}}$$

Είναι $d'(x)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ και $\sqrt{x^2-6x+\frac{45}{4}}>0 \quad \forall x>1$.

x	1		3		$+\infty$
d'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
d	$\|\|$	$\searrow$	ελ	$\nearrow$	

Για $x=3$ η d παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Το πλησιέστερο σημείο είναι το $K(3,\sqrt{3-1}) \to K(3,\sqrt{2})$



ii) $\lambda_{K\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_K}{x_\Gamma-x_K}=\frac{0-\sqrt{2}}{\frac{7}{2}-3}=-\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$

$\lambda_\varepsilon=\varphi'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3-1}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ισχύει $\lambda_{K\Gamma}\cdot\lambda_\varepsilon=-2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=-1$

Οπότε $(\varepsilon)\perp K\Gamma$

Καλά αποτελέσματα