1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε πως αν η f ' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) .

(Μονάδες 8)

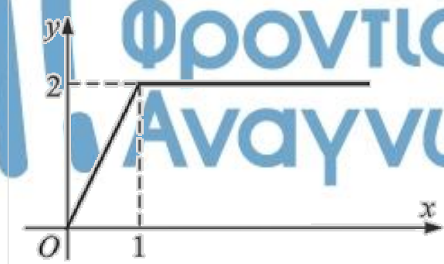
Α2. Έστω συνάρτηση f και σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής της παράστασης. Πότε λέμε πως το Α αποτελεί σημείο καμπής της C_f;

(Μονάδες 5)

Α3. Τι ονομάζω γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού Α ;

(Μονάδες 6)

Α4. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και F μια παράγουσα της f.



Ισχύει ότι:

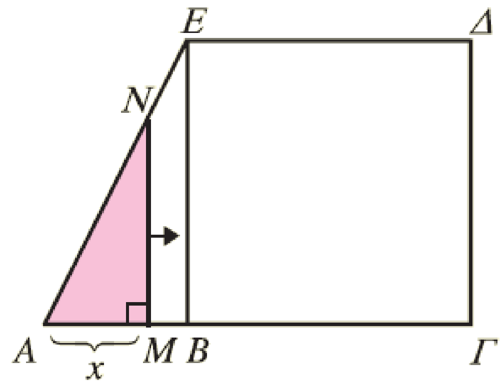
$\alpha)\ F(x) = x^2$ $\quad \beta)\ F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1 \\ 2, & x \ge 1 \end{cases}$ $\quad \gamma)\ F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$

$\delta)\ F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2x-1, & x \ge 1 \end{cases}$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β



Στο διπλανό σχήμα είναι :

ΑΒ=1 , ΑΓ=3 , ΓΔ=2 και ΑΜ=x.

Β1.Να εκφράσετε το ΜΝ ως συνάρτηση του x.

(Μον.7)

Αν ΜΝ=2x τότε:

Β2.Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του x καθώς το Μ διαγράφει το τμήμα ΑΓ είναι :

$$E(x) = \begin{cases} x^2 , & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 , & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

(Μον. 6)

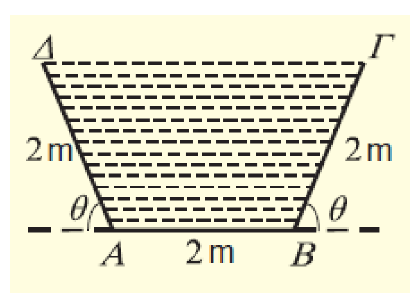
Β3.Να εξετάσετε αν η συνάρτηση Ε(x) είναι παραγωγίσιμη στο x=1 .Αν ναι να βρείτε την εφαπτομένη της στο σημείο Α(1,f(1)).

(Μον.3+2)

Β4.Να κάνετε την γραφική παράσταση της Ε(x) και να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην γραφική της παράσταση , τους άξονες x'x και y'y και την ευθεία x=2.

(Μον.4+3)

ΘΕΜΑ Γ



Ένα αρδρευτικό κανάλι του μεσσηνιακού κάμπου αρδρεύει το δημοτικό γήπεδο Αρφαρών , έδρα της τοπικής ομάδας ποδοσφαίρου!

Το κανάλι έχει κάθετη διατομή ισοσκελούς τραπεζίου ΓΒΑΔ, με $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Delta = \mathrm{B}\Gamma = 2$

Γ1. Να δείξετε πως το εμβαδό της κάθετης διατομής δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{E}(\theta) = 4 \cdot \eta\mu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \ , \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(Μονάδες 6)

Γ2. Να βρείτε την γωνία θ ώστε το κανάλι να μεταφέρει την μέγιστη ποσότητα νερού.

(Μονάδες 8)

Γ3. α. Να δείξετε πως η συνάρτηση $\varphi(\theta) = 4\sigma\upsilon\nu\theta + 1$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, \pi)$ και να βρείτε το πρόσημό της.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(\theta)$, παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής στο $(0, \pi)$.

(Μονάδες 2+4)

Γ4. Στις θέσεις Α , Β του αγωγού τοποθετήθηκαν μηχανισμοί ώστε οι πλευρές του ΑΔ , ΒΓ να μεταβάλλουν την κλίση τους. Η ρύθμιση του μηχανισμού είναι τέτοια ώστε κάποια χρονική στιγμή t_0 η γωνία θ μικραίνει με ρυθμό $\frac{1}{4}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της διατομής , αν εκείνη την στιγμή η πλευρά ΑΓ σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ rad με το οριζόντιο επίπεδο.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = lnx \text{ και } g(x) = \frac{1}{x}$.

Δ1.Να δείξετε πως οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, e)$,στο οποίο ισχύει λ=f(x_0), όπου λ η κλίση της C_f στο x_0 .

(Μον.3+1)

Δ2.Να χαράξετε την γραφική τους παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων και να βρείτε (συναρτήσει του x_0) το εμβαδόν του χωρίου Ω ανάμεσα στην C_f, την C_g και τις ευθείες $x = 1$, $x = x_0$, όπου x_0 η ρίζα του Δ1.

(Μον.3+3)

Δ3.Αν η εφαπτομένη της C_g στο τυχαίο σημείο της Μ(α,g(α)) , τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία Α,Β αντίστοιχα να δείξετε ότι :

i. Το Μ είναι μέσον του ΑΒ .
ii. Το εμβαδόν ΑΟΒ , όπου Ο η αρχή των αξόνων , είναι σταθερό ,δηλαδή ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Μ.

(Μον. 4+4)

Δ4.Δίνεται επίσης η h(x)=$e^{\sqrt{x-1}}$, x≥1. Αφού ορίσετε την φ(x)=(foh)(x) :

i. Να βρείτε σημείο Κ της C_φ το οποίο να απέχει λιγότερο από το σημείο $\Gamma(\frac{7}{2}, 0)$.

(Μον.4)

ii. Να δείξετε πως η εφαπτομένη της C_φ στο Κ είναι κάθετη στην ΚΓ.

(Μον.2)

Εύχομαι Επιτυχία!
Επιμέλεια : Γ.Α.Γιαννακόπουλος

ΑΝΟΔΟΣ
Φροντιστήριο
Αναγνωστήριο