

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ Νο 2



ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Να αποδείξετε πως αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

A2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ . Εάν

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ
- τότε να αποδείξετε πως η f είναι σταθερή στο Δ .

A3. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

A4. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G μία αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$

A5. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

A6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

(Μονάδες 24)

ΘΕΜΑ Β

B1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

B2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano.

B3. Ποια σημεία ονομάζονται *κρίσιμα σημεία* μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα διάστημα Δ ;

B4. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

B5. Πότε λέμε πως μία συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό μέγιστο;

B6. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

B7. Έστω συνάρτηση f και σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής της παράστασης. Τι ονομάζουμε εφαπτομένη της C_f στο A ;

B8. Πότε μία συνάρτηση λέμε ότι είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

B9. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πως ορίζεται η συνάρτηση πρώτη παράγωγος της f ;

B10. Πότε η ευθεία $y=l$ λέμε ότι είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(Μονάδες 30)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η πρόταση : " Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , τότε θα ισχύει υποχρεωτικά $f'(x_0) = 0$. "

Η παραπάνω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Αιτιολογήστε.

Γ2. Δίνεται η πρόταση : " Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , τότε ισχύει $f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του διαστήματος Δ . "

Η παραπάνω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Αιτιολογήστε.

Γ3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x_0 , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Γ4.

Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f είναι και ολικό μέγιστο αυτής.

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Γ5. Αν ισχύει $(f \cdot g)(x) = 0$, για κάθε $x \in A$, τότε

$f(x) = 0$, για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

Η παραπάνω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Αιτιολογήστε.

(Μονάδες 20)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Σωστό - Λάθος

ι. Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

β. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

δ. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x))$ τότε θα είναι ίσο με $f(2) \cdot g(2)$

ε. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

στ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

ζ. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

η. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει πάντα μοναδική ρίζα.

θ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta \mu x| \geq |x|$

ι. Η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας μη σταθερής συνάρτησης f είναι επίσης διάστημα.

κ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών στο $[\alpha, \beta]$ τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

λ. Μια γραμμή μπορεί να αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, όταν κάθε κατακόρυφη ευθεία την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο.

(Μονάδες 12)

Δ2. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

α. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε

- i. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = 0$
- ii. Η f δεν έχει καμία ρίζα στο (α, β)
- iii. Η f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο (α, β)
- iv. Τίποτα από τα παραπάνω δεν ισχύει.

(Μονάδες 2)

β. Έστω η f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη:

- i. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$
- iii. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$
- iv. Η f παίρνει μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$

(Μονάδες 2)

γ. Έστω η f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[α,β]$. Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις δεν ισχύει κατ'ανάγκη.

i. Η f είναι συνεχής στο $[α,β]$

ii. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[α,β]$

iii. Η f παίρνει μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή στο $[α,β]$

iv. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ρolle στο $[α,β]$

(Μονάδες 2)

δ) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει

i. μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

ii. μία ακριβώς ρίζα στο $(-1,0)$

iii. τρεις πραγματικές ρίζες

(Μονάδες2)

ε. Αν $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in [-1,1]$ και $f(0) = 0$ τότε :

i. $f(1) = -1$

ii. $f(-1) > 0$

iii. $f(1) > 0$

iv. $f(-1) = 0$

στ. Ποιό από τα παρακάτω όρια είναι καλά ορισμένο;

i. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x+1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x+1)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4}$

(Μονάδες 2)

ζ. Ποιό από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλά ορισμένο;

α) $\int_0^2 \ln x \, dx$ β) $\int_5^3 \frac{1}{x^2-4} \, dx$ γ) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} \, dx$ δ) $\int_1^4 \sqrt{-x} \, dx$

(Μονάδες 2)

Εύχομαι Επτυχία

