Ισχυρισμοί και αντιπαραδείγματα στα Μαθηματικά προσανατολισμού Γ' Ενιαίου Λυκείου

1. Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως και ορίζονται οι fog και gof τότε υποχρεωτικά ισχύει $g \circ f = f \circ g$.

- Ψευδής
- Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=\sqrt{x}$, $x \geq 0$

D_{fog}

Πρέπει $\begin{cases} x \epsilon D_g \\ g(x) \epsilon D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$ *άρα* $D_{fog} = (0, +\infty)$

D_{gof}

Πρέπει $\begin{cases} x \epsilon D_f \\ f(x) \epsilon D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$ *άρα* $D_{gof} = [1, +\infty)$

Είναι προφανές πως $D_{fog} \neq D_{gof}$ άρα $fog \neq gof$.

2. Αν ισχύει $(f \cdot g)(x) = 0$, για κάθε $x \epsilon A$, τότε

$f(x) = 0$, για κάθε $x \epsilon A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

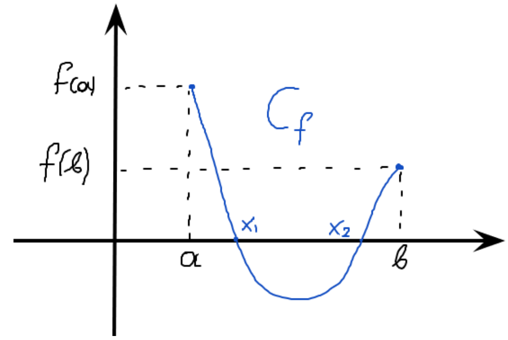
- Ψευδής
- Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} 0, x \geq 0 \\ 1, x < 0 \end{cases}$

Ισχύει

$(f \cdot g)(x)=\begin{cases} 1 \cdot 0, x \geq 0 \\ 0 \cdot 1, x < 0 \end{cases} = 0$, *για κάθε* $x \epsilon \mathbb{R}$, *αλλά καμία από τις* f , g *δενείναι* μηδενική συνάρτηση.

3. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$και ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ *τότε η* $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο (α, β).

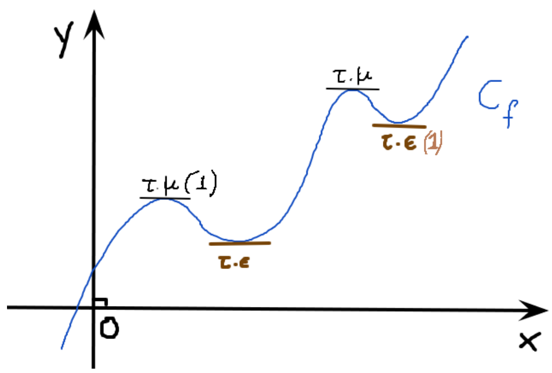
- Ψευδής
- Για παράδειγμα η συνάρτηση του σχήματος έχει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ αλλά έχει δύο ρίζες στο (α,β)



4. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της *f* *είναι και ολικό μέγιστο αυτής*.

- Ψευδής

- Για παράδειγμα στη συνάρτηση του σχήματος 1 το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα δεν είναι και ολικό μέγιστο , αφού η f δεν έχει ολικό μέγιστο.
  (αντίστοιχα για ολικό ελάχιστο)



σχήμα 1

5. Ένα τοπικό μέγιστο της f δεν γίνεται να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο .

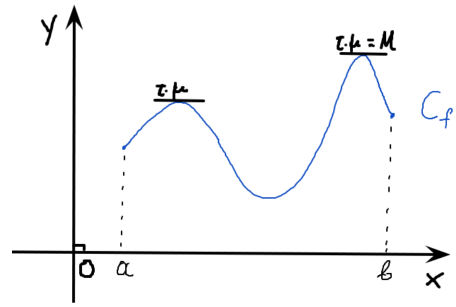
- Ψευδής

- Για παράδειγμα στη συνάρτηση του σχήματος 1 παρατηρώ πως το ένα τοπικό ελάχιστο (τ.ε 1) είναι πιο μεγάλο από το ένα τοπικό μέγιστο (τ.μ 1).

6. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] τότε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι και ολικό μέγιστο .

- Αληθής

- Αν η f συνεχής στο [α,β] ,από Θ.Μ.Ε.Τ θα παρουσιάζει μία μέγιστη (Μ)και μία ελάχιστη τιμή (m) στο διάστημα αυτό.Σε αυτή την περίπτωση ,όπως φαίνεται και στο σχήμα 2, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα αποτελεί και το ολικό μέγιστο (Μ)

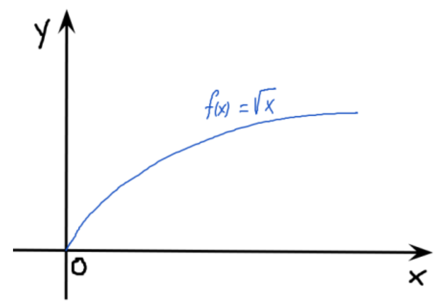


σχήμα 2

7. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση δεν έχει ακρότατα .

- Ψευδής

- Για παράδειγμα η f(x)=$\sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι γνησίως αύξουσα αλλά παρουσιάζει ελάχιστο το f(0)=0 (σχ.3)

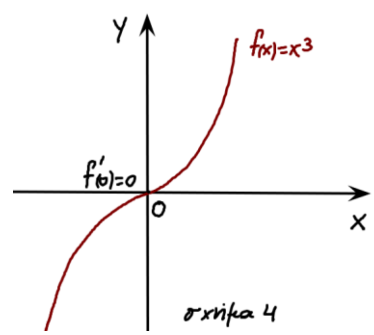


σχήμα 3

8. Αν το $f'(x_0) = 0$ τότε η f θα παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

- Ψευδής

- Για παράδειγμα η f(x)=x^3 , $έχει\ f'(0) = 0$ αλλά είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.(σχ.4)



σχήμα 4

(Ομοίως απαντάμε στον ισχυρισμό πως "*όλα τα κρίσιμα σημεία είναι και θέσεις ακροτάτων*")

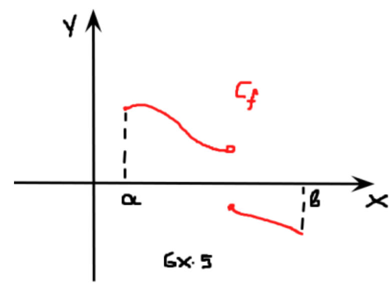
9. Εάν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)$ τότε θα υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

- Ψευδής
- Για παράδειγμα οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}1\,, x\le 0\\ \\ 0, x>0\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}0\,, x\le 0\\ \\ 1, x>0\end{cases}$$ των οποίων το όριο στο $x=0$ δεν υπάρχει .

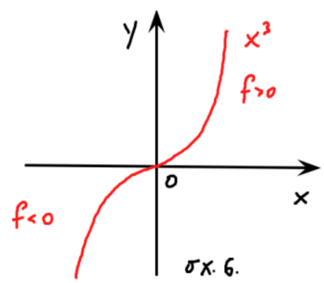
Όμως $(f+g)(x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to 0}(f+g)(x)=1$

10. Αν $f(x)\neq 0$ σε ένα διάστημα Δ τότε θα διατηρεί πρόσημο στο Δ.



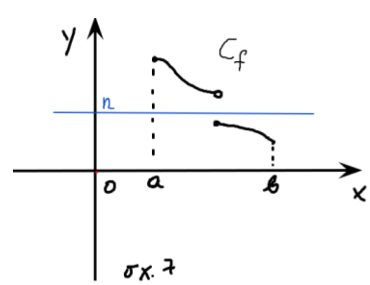
- Ψευδής
- Δεν αναφέρεται η συνέχεια. Εάν η f δεν είναι συνεχής , δεν διατηρεί υποχρεωτικά πρόσημο στο Δ. (σχήμα 5)

11. Αν $f(x)\neq 0$ *στο* $\mathbb{R}^*$ *τότε θα διατηρεί πρόσημο στο* $\mathbb{R}^*$.



- Ψευδής
- Το θεώρημα δεν ισχύει για ένωση διαστημάτων . Για παράδειγμα η συνάρτηση f(x)=x^3 για την οποία ισχύει f(x)≠0 για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ αλλά δε διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.(σχήμα 6)

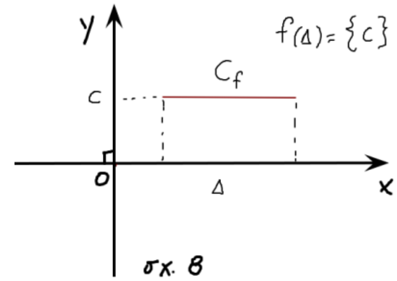
12. Εάν η f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό **η** ανάμεσα στα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ θα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_0)=\eta$.



- Ψευδής
- Δεν αναφέρεται η συνέχεια. Εάν η f δεν είναι συνεχής ,δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές. (σχήμα 7)

13. Η εικόνα f(Δ)ενός διαστήματος Δ , μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι επίσης διάστημα.

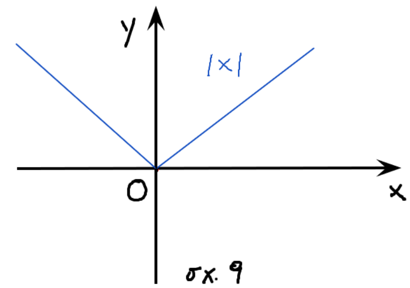
- Ψευδής
- Εάν η f είναι σταθερή η εικόνα είναι μονοσύνολο. (σχήμα 8)



σχ. 8

14. Εάν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

- Ψευδής
- Για παράδειγμα η f(x)=|x| η οποία είναι συνεχής στο x=0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη καθώς
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 \ \ \kappa\alpha\iota$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

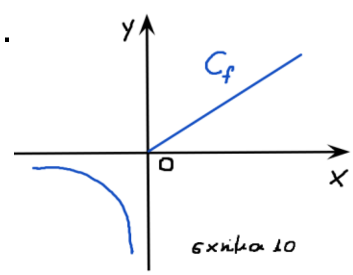


σχ. 9

15. Εάν η f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

- Αληθής
- Εάν η f ήταν παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 τότε σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα θα ήταν και συνεχής. Όμως αυτό είναι άτοπο , αφού η f δεν είναι συνεχής.

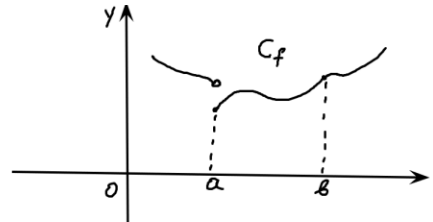
16. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι $1-1$ είναι και γνησίως μονότονη.



σχήμα 10

- Ψευδής
- Για παράδειγμα η συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x<0\\ \\ x, x\geq 0\end{cases} \qquad \textit{είναι } 1-1 \textit{ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη .}$$

17. Εάν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε θα είναι συνεχής σημεία στα α και β .



σχ. 11

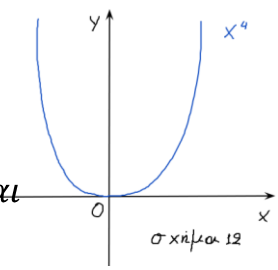
- Ψευδής
- Η συνάρτηση του σχήματος 11 , είναι συνεχής στο [α,β] αλλά όχι στο x=α.

18. Εάν η $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = l$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ή $\lim_{x \to x_0} f(x) = -l$

- Ψευδής
- Για παράδειγμα στην συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1\,, x \geq 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$ $ισχύει$ $|f(x)| = 1\,, x \in \mathbb{R}$

$$Οπότε\ \lim_{x \to 0} |f(x)| = 1\ αλλά\ το\ \lim_{x \to 0} f(x)\ δεν\ υπάρχει. (βλέπε\ σχήμα\ 15)$$

19. Εάν η f είναι κυρτή στο Δ τότε θα ισχύει $f''(x) > 0$ $για\ κάθε\ εσωτερικό\ σημείο\ του\ Δ.$.

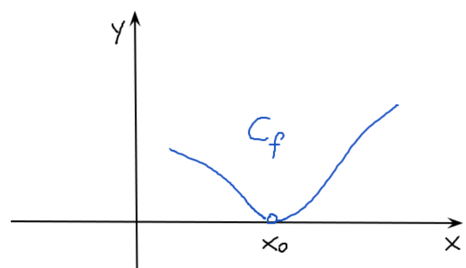


σχήμα 12

- Ψευδής
- Για παράδειγμα η συνάρτηση f(x)=x^4.
  $Είναι\ f'(x) = 4x^3, η\ οποία\ είναι γνησίως\ αύξουσα\ στο\ \mathbb{R}\ άρα\ η f\ είναι$
  $κυρτή\ στο\ \mathbb{R}.$ (σχήμα 12)
  $Όμως\ f$(x)=12x^2 η οποία δεν είναι θετική στο R αφού $f''(0) = 0$.

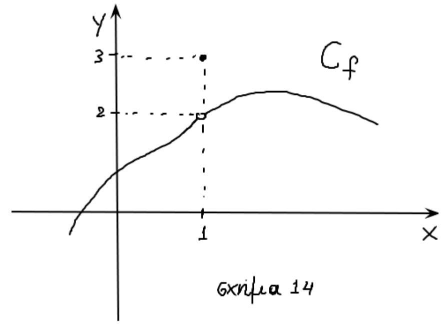
20. Εάν $f(x) > 0$ $κοντά\ στο\ x_0\ τότε\ θα\ ισχύει$ $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$

- Ψευδής
- Για παράδειγμα στην συνάρτηση $f(x)$ $του\ σχήματος$ 13 ισχύει f(x)>0 κοντά $στο\ x_0\ αλλά$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.



σχήμα 13

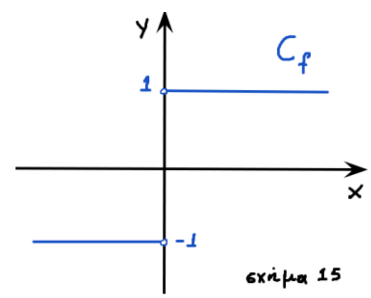
21. Εάν $\text{υπάρχει το} \lim_{x \to x_0} f(x)$ τότε θα ισχύει πάντα $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$



- Ψευδής
- Για παράδειγμα στην συνάρτηση $f(x)$ *του σχήματος* 14 , *είναι* $f(1) = 3$ *αλλά* $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

22. Εάν ισχύει $f'(x) = 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^*$, *τότε η* f *είναι σταθερή στο* $\mathbb{R}^*$.

- Ψευδής
- Το θεώρημα ισχύει για διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων.



Για παράδειγμα στη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$,

ισχύει f'(x)=0 για κάθε x$\in \mathbb{R}^*$, αλλά

δεν είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

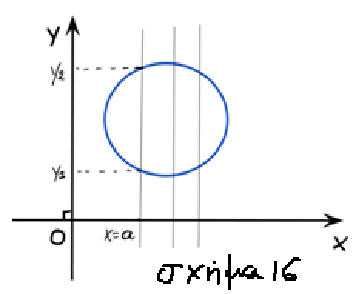
Σχόλιο: Στη θέση του $\mathbb{R}^*$ μπορεί να βρίσκεται οποιαδήποτε ένωση διαστημάτων.

23. Ο κύκλος μπορεί να αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

- Ψευδής
- Μια γραμμή μπορεί να αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης εάν κάθε κατακόρυφη ευθεία την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο.

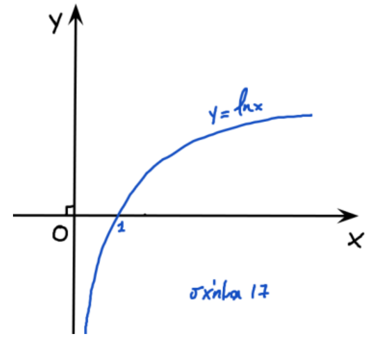
Διαφορετικά σε μία τιμή του x θα αντιστοιχούν δύο η περισσότερες τιμές του y. Οπότε ο κύκλος δεν μπορεί να αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

Από το σχήμα 16 βλέπουμε πως στην τιμή x=α αντιστοιχούν δύο τιμές για το y.



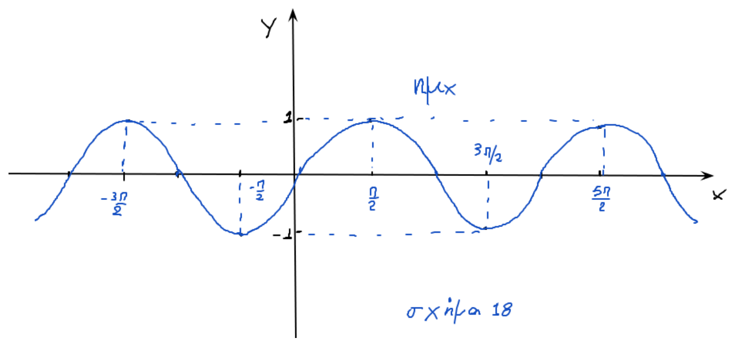
24. Μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, παρουσιάζει μέγιστο (M) και ελάχιστο (m) στο διάστημα αυτό.

- Ψευδής
- Για να ισχύει αυτό πρέπει το Δ να είναι κλειστό διάστημα , δλδ Δ=[α,β].
  Για παράδειγμα η f(x)=lnx είναι συνεχής στο Δ=(0,+∞) αλλά δεν παρουσιάζει ακρότατα.



25.Μία συνάρτηση f μπορεί να έχει το πολύ μία θέση ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου.

- Ψευδής
- Για παράδειγμα η f(x)=ημx έχει άπειρες θέσεις ελαχίστου (x=2kπ - $\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$) και άπειρες θέσεις μεγίστου (x=2kπ + $\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$)



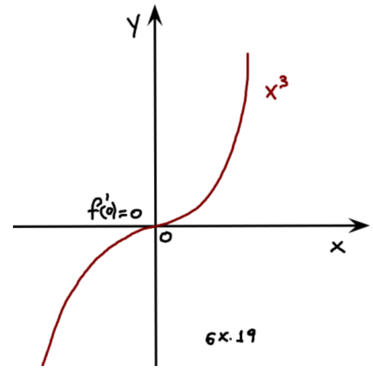
26. Εάν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)$ τότε θα υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

- Ψευδής
- Για παράδειγμα οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}1\,,x\le 0\\ 0,x>0\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}0\,,x\le 0\\ 1,x>0\end{cases} \quad \text{των οποίων το όριο στο } x=0 \text{ δεν υπάρχει.}$$

Όμως $(f\cdot g)(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x)=0$

27. Εάν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ τότε θα ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. .



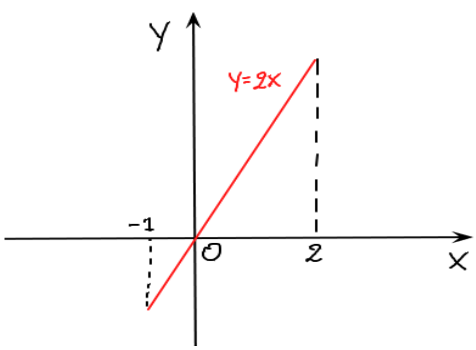
- Ψευδής.

- Για παράδειγμα η $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,αλλά $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f'(0)=0$.

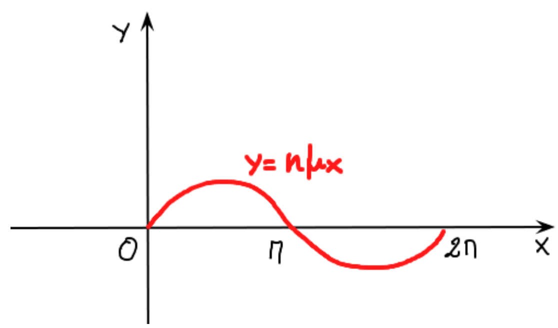
28. Αν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ τότε ισχύει υποχρεωτικά πως $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

- Ψευδής.
- Για παράδειγμα στη συνάρτηση $f(x)=2x$ του σχήματος 20 ,για την οποία ισχύει:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} 2xdx = [x^2]_{-1}^{2} = 3 > 0 \text{ αλλά δεν ισχύει } f(x) \geq 0 \text{ στο } [-1,2].$$



Σχήμα 20



Σχήμα 21

29. Αν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε ισχύει υποχρεωτικά πως $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

- Ψευδής.
- Για παράδειγμα στη συνάρτηση f(x)=ημx στο σχ.21,για την οποία ισχύει

$$\int_{0}^{2\pi} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi} \eta\mu x dx = [\sigma\upsilon\nu x]_{0}^{2\pi} = \sigma\upsilon\nu 2\pi - \sigma\upsilon\nu 0 = 1 - 1 = 0 \text{ αλλά δεν ισχύει}$$
$f(x) = 0$ στο$[0,2\pi]$.