ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α3

i) Λάθος ii) Λάθος iii) Λάθος iv) Λάθος v) Λάθος vi) Σωστό

vii) Λάθος viii) Λάθος

ΘΕΜΑ Β1

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-1},\quad x\neq 1$$

α. Η f είναι συνεχής στο $A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ ως ρητή

Ισχύει $f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-1)-1\cdot(x^2-x-2)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-2x-x+1-x^2+x+2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$

Λύνω $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+3=0 \quad \Delta=-8<0$

και $(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$, διπλή ρίζα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	‖	$+$
f	↗	‖	↗

Η f είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$

Δεν παρουσιάζει ακρότατα

β. $f''(x)=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x+3)}{(x-1)^4}=\dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot[(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x+3)]}{(x-1)^{\cancel{4}3}}$

$=\dfrac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x-6}{(x-1)^3}=\dfrac{-4}{(x-1)^3}$

Λύνω $f''(x)=0 \Leftrightarrow -4=0$, αδύνατη και $(x-1)^3=0 \Leftrightarrow x=1$, τριπλή ρίζα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$+$	‖	$-$
f	∪	‖	∩

f κυρτή στο $(-\infty,1)$

κοίλη στο $(1,+\infty)$

Δεν έχει σ.κ

γ. Κατακόρυφες·

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[(x^2-x-2)\frac{1}{x-1}\right] = -2(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ldots = -2(+\infty) = -\infty$$

Η $x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Οριζόντια - πλάγιες

Στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x-2}{x-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x-1} = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

Η $y = 1\cdot x + 0 \Rightarrow y = x$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Στο $-\infty$

Ομοίως βρίσκουμε πως η $y=x$ είναι ασύμπτωτη και στο $-\infty$.

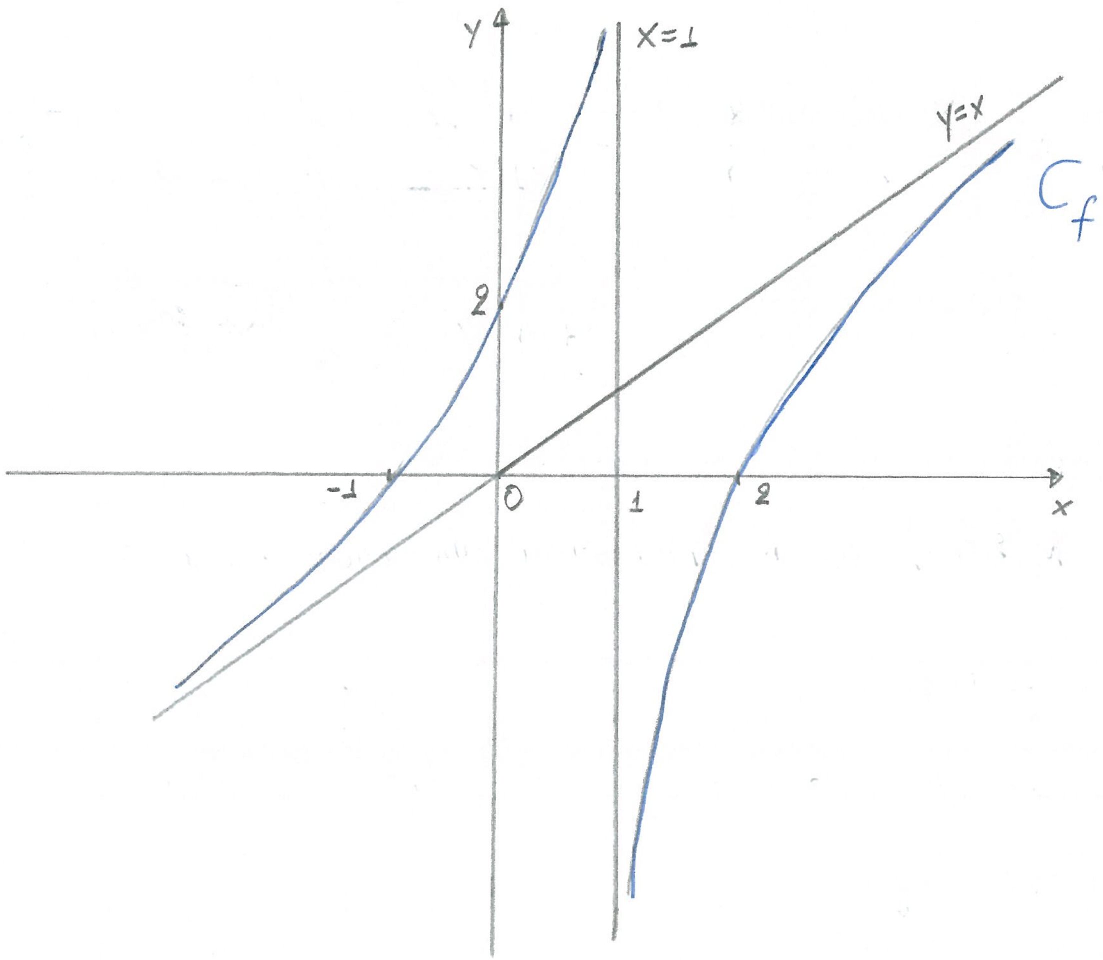
δ. Βοηθητικά βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες

- Για $x=0$: $f(0) = \frac{0-0-2}{-1} = 2$ Τομή με $y'y$: $A(0,2)$
- $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=2$ Τομή με $x'x$

$B(-1,0)$, $\Gamma(2,0)$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	‖	$+$
f''	$+$	‖	$-$
f		‖	



ΘΕΜΑ Β2

$f(x) = xe^{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}$

α. Η f συνεχής στο $A=\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (1-x)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x} \cdot (1-x)$

Λύνω $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	ο.μ. 1	$\searrow$	

Η f ↑ στο $(-\infty, 1]$ και f ↓ στο $[1, +\infty)$

Το $f(1) = 1$ είναι μέγιστο της f

β. $f''(x) = e^{1-x}(1-x)'(1-x) + e^{1-x} \cdot (1-x)' = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = -e^{1-x} \cdot (1-x+1)$

$f''(x) = (x-2)e^{1-x}$

Λύνω $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$	σ.κ.	$\smile$	

Η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$

Το $M(2, f(2))$ δηλ. $M\left(2, \frac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

γ. Κατακόρυφες

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Οριζόντιες-πλάγιες

Στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} \overset{y=1-x}{=\!=} \lim\limits_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty \notin \mathbb{R}$ Η C_f δεν έχει ασύμπτωτη

στο $-\infty$.

Βρίσκω το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1-x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$.

Στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}\overset{y=1-x}{=}\lim_{y\to-\infty}e^{y}=0=\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}xe^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0=\beta\in\mathbb{R}$$

Η $y=0\cdot x+0 \Rightarrow y=0$ (άξονας $x'x$) οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ. Βοηθητικά βρίσκω σημεία τομής με άξονες

- Για $x=0$: $f(0)=0$. Τομή με $y'y$: $O(0,0)$
- $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ Τομή με $x'x$: $O(0,0)$

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	
f''		$-$		$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	ο.μ	$\searrow$	σ.κ	$\searrow$