Ενδεικτικές

Λύσεις

Ιανουάριος 2022

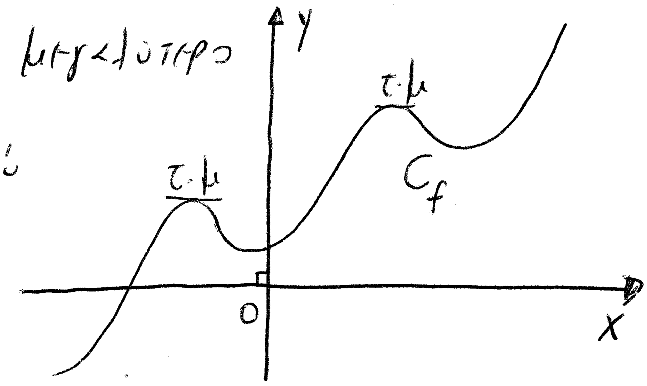
ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο - σελ 133

Α2. Σχολικό βιβλίο - σελ 128

Α3. Ψευδής.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f του σχήματος έχει 2 τοπικά μέγιστα, όμως το μεγαλύτερο από αυτά <u>δεν</u> είναι ολικό, αφού η f δεν παρουσιάζει μέγιστο



Α4. i) Σωστό ii) Λάθος

Α5. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,10]$ άρα και <u>συνεχής</u>.

▷ Ισχύει $f'(x)>0$ στο $(-1,1)$ άρα $f \nearrow [-1,1]$

$f'(x)>0$ στο $(-4,6)\cup(6,8)$ οπότε $f \nearrow [-4,8]$

▷ $f'(x)<0$ στο $(1,4)$ άρα $f \searrow [1,4]$

$f'(x)<0$ στο $(8,10]$ άρα $f \searrow [8,10]$

x	-1		1		4		6		8		10
f'	0	+	0	−	0	+	0	+	0	−	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Β.}}$

$f(x) = x^3 + 3x - 4, \quad x \in \mathbb{R}$.

Β1. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα

$f \uparrow \mathbb{R}$ και "1-1". Επομένως αντιστρέφεται.

Β2. Ισχύει $\dfrac{\kappa}{\lambda^2+3} < \dfrac{\lambda}{\kappa^2+3} \Leftrightarrow (\kappa^2+3)\cdot\kappa < \lambda\cdot(\lambda^2+3)$

$\Leftrightarrow \kappa^3 + 3\kappa < \lambda^3 + 3\lambda \overset{-4}{\Leftrightarrow} \kappa^3 + 3\kappa - 4 < \lambda^3 + 3\lambda - 4$

$\Leftrightarrow f(\kappa) < f(\lambda) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \kappa < \lambda$, που ισχύει.

Β3. Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης.

$(\varepsilon)\ y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Rightarrow y - (x_0^3 + 3x_0 - 4) = (3x_0^2 + 3)(x - x_0)$

$\overset{\Gamma(0,-6)}{\Longrightarrow} -6 - x_0^3 - 3x_0 + 4 = (3x_0^2 + 3)(0 - x_0)$

$\Rightarrow -x_0^3 - \cancel{3x_0} - 2 = -3x_0^3 - \cancel{3x_0} \Rightarrow 2x_0^3 = 2 \Rightarrow x_0^3 = 1$

$\Rightarrow x_0 = 1$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$\Rightarrow y - 0 = 6(x-1) \Rightarrow y = 6x - 6$

B4. Η $f \uparrow \mathbb{R}$ και συνεχής οπότε

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$ διότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3+3x-4) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3+3x-4) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

Η εξίσωση γράφεται: $x^3+3x=2026 \overset{-4}{\Longleftrightarrow} x^3+3x-4=2022$

$$\Leftrightarrow f(x)=2022$$

Το $2022 \in f(\mathbb{R})$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=2022$.

Η $f \uparrow \mathbb{R}$ και "1-1" οπότε το x_0 είναι μοναδικό,

δηλ. η εξίσωση $f(x)=2022$ έχει μοναδική λύση.

B5. $L = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{f^2(x)+2f(x)-1} - f(x)\right]$. Θέτω $y=f(x)$ με $y_0 = \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

οπότε $L = \lim_{y\to+\infty}\left[\sqrt{y^2+2y-1} - y\right] = \lim_{y\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{y^2+2y-1}-y\right)\left(\sqrt{y^2+2y-1}+y\right)}{\sqrt{y^2+2y-1}+y}$

$$L = \lim_{y\to+\infty} \frac{\sqrt{y^2+2y-1}^{\,2} - y^2}{\sqrt{y^2\left(1+\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}\right)}+y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{2y-1}{|y|\cdot\sqrt{1+\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}}+y}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{y \to +\infty} \frac{2y - 1}{y \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2}} + y}$$

αφού $y \to +\infty$ ισχύει
$y > 0 \Rightarrow |y| = y$

$$\Rightarrow L = \lim_{y \to +\infty} \frac{\cancel{y}\left(2 - \frac{1}{y}\right)}{\cancel{y}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2}} + 1\right)} = \frac{2 - 0}{\sqrt{1} + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

διότι $\lim_{y \to +\infty} \frac{2}{y} = 0 = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y^2}$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \le 1 \\ 3x^2 + b, & x > 1 \end{cases}$$

Γ1. Αφού ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[0,2]$ πρέπει να είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παρ/μη στο $(0,2)$. Οπότε θα πρέπει να είναι συνεχής και παρ/μη στο $x_0 = 1$.

▷ Συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} (x^2 + ax) = \lim_{x \to 1^+} (3x^2 + bx)$$

$$\Rightarrow 1 + a = 3 + b \Rightarrow b = a - 2. \quad (1)$$

Οπότε η f γράφεται $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \le 1 \\ 3x^2 + (a-2), & x > 1 \end{cases}$

▷ Παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+ax-(1+a)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2+(a-2)-(1+a)}{x-1}$$

(Τα όρια έχουν μορφή $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζω D.L.H) $\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{2x+a}{1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{6x}{1}$

$$\Rightarrow 2+a = 6 \Rightarrow a = 4.$$

Από (1) $b = a-2 = 4-2 = 2$.

(Παρατηρώ πως για $a=4, b=2$ $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 6 \in \mathbb{R}$)

Γ2. (g) $7x-y-3=0 \Rightarrow y = 7x-3$ άρα $\lambda_g = 7$

Αν (ε) η εφαπτομένη, πρέπει $(\varepsilon) \parallel (g) \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_g$

$\Rightarrow f'(x_0) = 7$ όπου x_0 το σημείο επαφής της εφαπτομένης.

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ στο $[0,2]$.

• Η f συνεχής στα $[0,1)$, $(1,2]$ ως πολυωνυμική και συνεχής στο 1 από (Γ1) άρα f συνεχής στο $[0,2]$

• Επίσης η f παραγωγίσιμη στα $(0,1)$ και $(1,2)$ με $f'(x)=2x+4$ και $f'(x)=6x$ αντίστοιχα.

Από (Γ1) η f παρ/μη στο $x_0=1$ με $f'(1)=6$. Άρα η f παραγωγίσιμη στο $(0,2)$

Από Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{14-0}{2} = 7 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_g \Rightarrow \varepsilon \parallel g$$

Γ3. Για $x<1$: $f'(x)=2x+4$.

Λύνω $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	$\parallel$	

Για $x>1$: $f'(x)=6x$

Λύνω $f'(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$

και $f'(1)=6>0$ άρα ο πίνακας μονοτονίας είναι:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Η $f \uparrow [-2,+\infty)$

$f \downarrow (-\infty, 2]$

Απο εφαρμογή σχολικού βιβλίου :

$\ln x \le x-1$, για κάθε $x>0 \Leftrightarrow \boxed{\ln x + 1 \le x}$

Η $f \uparrow [-2,+\infty)$ και για $x \to 1$ ισχύει $\ln x + 1 > 0$ και $x > 0$

$\ln x + 1 \le x \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(\ln x + 1) \le f(x) \Longrightarrow f(\ln x + 1) - f(x) \le 0.$

και $\lim\limits_{x \to 1} [f(\ln x + 1) - f(x)] = f(1) - f(1) = 0.$

Οπότε $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{f(\ln x + 1) - f(x)} = -\infty$

Γ4. Ισχύει $y(t) = f(x(t))$, $x(t) > 1$ άρα

$$y(t) = 3x^2(t) + 2$$

Παραγωγίζω την σχέση : $y'(t) = 6x(t) \cdot x'(t)$ (2)

Την χρονική στιγμή t_0: $y'(t_0) = 12x'(t_0)$.

Η (2) $\overset{t=t_0}{\Longrightarrow} y'(t_0) = 6x(t_0)x'(t_0) \Rightarrow 12x'(t_0) = 6x(t_0) \cdot x'(t_0)$

$\overset{: x'(t_0) > 0}{\Longrightarrow} 12 = 6x(t_0) \Rightarrow x(t_0) = 2.$

Το ζητούμενο σημείο είναι $K(2, f(2))$ δηλ $K(2, 14)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $x\cdot g(x)+1\leq e^x-x \Leftrightarrow x\cdot g(x)+1+x-e^x\leq 0$

$\Leftrightarrow h(x)\leq 0$

όπου $h(x)=x\cdot g(x)+x+1-e^x,\ x\in\mathbb{R}$

Παρατηρώ πως $h(0)=0\cdot g(0)+0+1-e^0=0$ άρα

$h(x)\leq 0 \Leftrightarrow h(x)\leq h(0)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η h παρουσιάζει μέγιστο $x=0$ και η h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

με $h'(x)=1\cdot g(x)+x\cdot g'(x)+1-e^x$.

Από Θ. Fermat: $h'(0)=0 \Leftrightarrow g(0)+0\cdot g'(0)+1-e^0=0$

$\Leftrightarrow g(0)=0$ Άρα $f(0)=g(0)=0$

Για τον τύπο της f αρκεί νδο $2f(x)=\ln(x^2+1) \Leftrightarrow e^{2f(x)}=e^{\ln(x^2+1)}$

$\Leftrightarrow e^{2f(x)}=x^2+1 \Leftrightarrow e^{2f(x)}-x^2-1=0$

Θεωρώ την $k(x)=e^{2f(x)}-x^2-1$, συνεχή και παρ/μη στο $\mathbb{R}$

$k'(x)=e^{2f(x)}\cdot 2\cdot f'(x)-2x \overset{(2)}{=} e^{2f(x)}\cdot 2\cdot x\cdot e^{-2f(x)}-2x=e^0\cdot 2x-2x=0$

Επομένως η $k(x)$ σταθερή συνάρτηση, δηλ $k(x)=c,\ c\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$e^{2f(x)}-x^2\ \ 1=c \xRightarrow{x=0} e^{2f(0)}-0-1=c \Rightarrow e^0-1=c$

$\Rightarrow c=0$. Τελικά $e^{2f(x)}-x^2-1=0 \Leftrightarrow e^{2f(x)}=x^2+1$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{2}, \ x\in\mathbb{R}$

Δ2. Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=\dfrac{2x}{2(x^2+1)}=\dfrac{x}{x^2+1}$

Πρέπει νδο $\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\le\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|x|}{|x^2+1|}\le\dfrac{1}{2} \overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{|x|}{x^2+1}\le\dfrac{1}{2}$

$\overset{\cdot 2(x^2+1)>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{|x|}{\cancel{x^2+1}}\cdot 2(\cancel{x^2+1})\le 2\cdot(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2|x|\le x^2+1$

$\overset{x^2=|x|^2}{\Leftrightarrow} 0\le |x|^2-2|x|+1 \Leftrightarrow 0\le(|x|-1)^2$, ισχύει

Δ3. Η ϕ συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

Η ϕ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $\phi'(x)=f(x)+(x-1)\cdot f'(x)$

$$\left.\begin{aligned}\phi(0)&=-1\cdot f(0)=-1\cdot\frac{\ln 1}{2}=0\\ \phi(1)&=(1-1)\cdot f(1)=0\cdot\frac{\ln 2}{2}=0\end{aligned}\right\}\ \phi(0)=\phi(1)$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$, δηλ. υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $\phi'(\xi)=0$.

Είναι $\phi'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)+(\xi-1)\cdot f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln(\xi^2+1)}{2}+(\xi-1)\dfrac{\xi}{\xi^2+1}=0$

$(\xi^2+1)\ln(\xi^2+1)+2\xi(\xi-1)=0 \Leftrightarrow$

$(\xi^2+1)\cdot\ln(\xi^2+1)=2\xi-2\xi^2$

Δ4. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Λύνουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

και ισχύει $x^2+1>0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Απαλείφουμε τους παρονομαστές και η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$(x-4)\cdot(2f'(\alpha)-1) + (x-3)\cdot(f(\eta\mu\alpha)-f(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$A(x) = 0 \quad \text{όπου} \quad A(x) = (x-4)\cdot(2f'(\alpha)-1) + (x-3)\cdot(f(\eta\mu\alpha)-f(\alpha))$$

Είναι $A(3) = -(2f'(\alpha)-1) \geq 0$ διότι από (Δ2) ισχύει

$|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ άρα $f'(\alpha) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2f'(\alpha)-1 \leq 0$

$A(4) = 1\cdot(f(\eta\mu\alpha)-f(\alpha)) \leq 0$ διότι από γνωστή ανίσωση:

$|\eta\mu\alpha| \leq |\alpha| \Leftrightarrow -|\alpha| \leq \eta\mu\alpha \leq |\alpha|$.

Αφού $\alpha \leq 0$ ισχύει $|\alpha| = -\alpha$ άρα: $\alpha \leq \eta\mu\alpha \leq -\alpha \Rightarrow \eta\mu\alpha \geq \alpha$.

Για $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$ ισχύει $\eta\mu\alpha \leq 0$ και $f \downarrow (-\infty, 0]$. Έχουμε λοιπόν

$\eta\mu\alpha \geq \alpha \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow} f(\eta\mu\alpha) \leq f(\alpha) \Rightarrow f(\eta\mu\alpha) - f(\alpha) \leq 0$, δηλ. $A(4) \leq 0$

Ισχύει επομένως $A(4)\cdot A(3) \leq 0$.

- Αν $A(4)\cdot A(3) = 0 \Leftrightarrow A(3)=0$ ή $A(4)=0$ δηλ ρίζες το 3 ή το 4.

- Αν $A(4)\cdot A(3) < 0$, αφού η $A(x)$ συνεχής στο $[3,4]$ ως πολυωνυμική από Θ. Bolzano η $A(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(3,4)$

Τελικά, η $A(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[3,4]$.

Η $A(x)$ είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού (ως προς x) οπότε έχει το πολύ μια ρίζα.

Τελικά η $A(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[3,4]$.